

Динамика вещества в тесных двойных звездах

Дмитрий Валерьевич Бисикало



План лекций

- 1. Общие сведения о тесных двойных звездах.**
- 2. Наблюдательные проявления элементов структуры течения в тесных двойных звездах.**
- 3. Численное моделирование течений в тесных двойных системах.**

План лекций

- 1. Общие сведения о тесных двойных звездах.**
- 2. Наблюдательные проявления элементов структуры течения в тесных двойных звездах.**
- 3. Численное моделирование течений в тесных двойных системах.**

Численное моделирование течений в тесных двойных системах

Андрей Георгиевич Жилкин

Часть 1

ЗАЧЕМ?

Философское отступление

Вычислительный эксперимент

Во все времена эксперимент играл исключительную роль в исследовании окружающего мира. Эксперимент служил одновременно и источником данных об изучаемом явлении и инструментом его изучения. По мере развития знания область научного исследования непрерывно расширяется. Уже сейчас человек пытается анализировать явления, экспериментальное повторение которых в земных условиях невозможно.

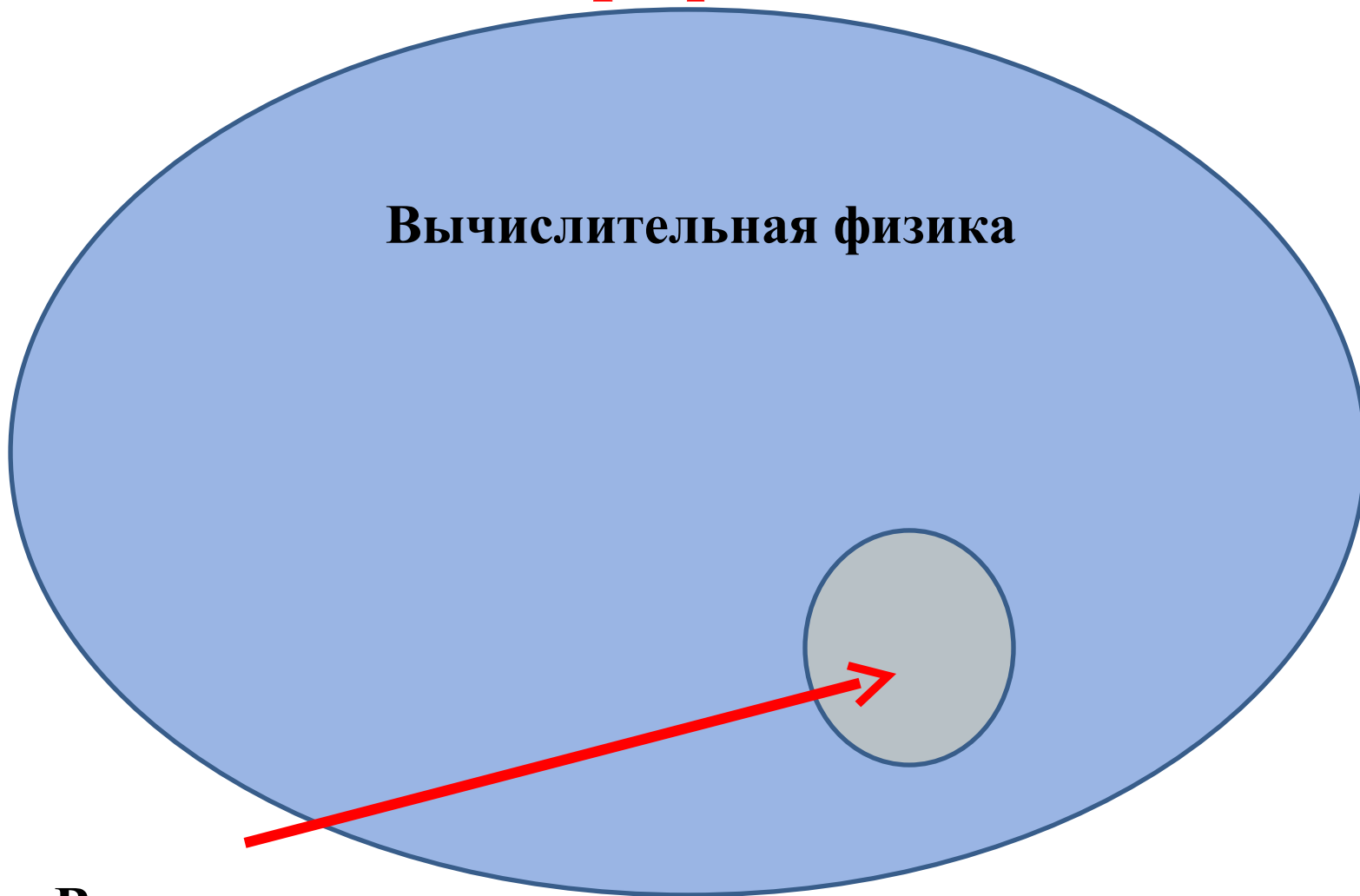
В подобной ситуации у эксперимента сохраняется лишь одна функция - сбор информации об окружающем мире, в то время как функция инструмента познания исчезает. Тем самым образуется разрыв между физическими теориями и все возрастающим объемом экспериментальных данных об окружающем мире.

Вычислительный эксперимент

Заполнить разрыв между теоретическими знаниями и экспериментальными данными может вычислительный эксперимент, роль которого существенно выросла в последнее время в связи с бурным развитием вычислительной техники. Вычислительный эксперимент, опираясь на теоретическое описание физического процесса, может воспроизводить и даже предсказывать картину явления.

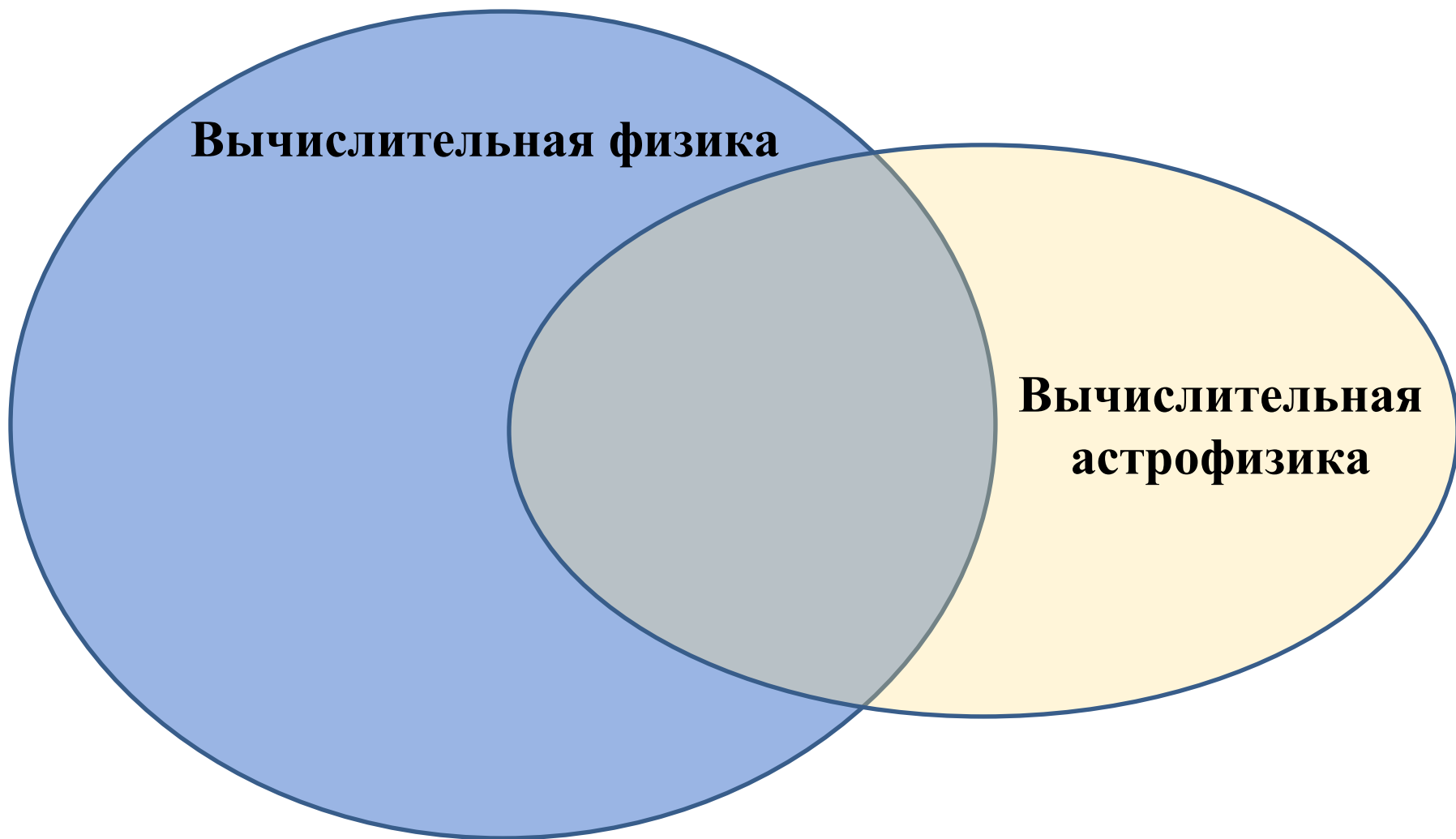
В дальнейшем, сравнивая численный результат с экспериментальными данными, можно получить дополнительную информацию об исследуемых физических процессах и уточнить исходную теорию. Тем самым вычислительный эксперимент выполняет большинство функций традиционного эксперимента.

Вычислительная физика и вычислительная астрофизика



Вычислительная
астрофизика?

Вычислительная физика и вычислительная астрофизика



Особенности вычислительной астрофизики

При рассмотрении астрофизических приложений мы вступаем в область, где наши интуитивные представления уже не работают, поскольку исследуемые объекты демонстрируют экстремальные свойства и характеризуются термодинамическими величинами, на много порядков превосходящими известные из человеческого опыта значения.

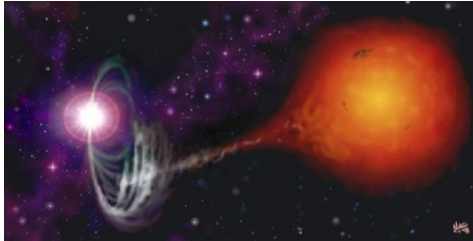
Астрофизические течения имеют свои специфические особенности и их необходимо учитывать при построении численных моделей. Такие течения характеризуются огромными пространственными и временными масштабами, которые могут сильно варьироваться. Это может влиять на критерии стационарности течения и на выбор определяющих физических и газодинамических эффектов.

Особенности вычислительной астрофизики

В астрофизике определенную роль играют все четыре типа взаимодействий: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. **Сильное** взаимодействие определяет энергетику звезд за счет ядерных реакций. **Слабое** взаимодействие является существенным для нейтринной астрофизики. **Электромагнитное** взаимодействие, в первую очередь, связано с космическими магнитными полями.

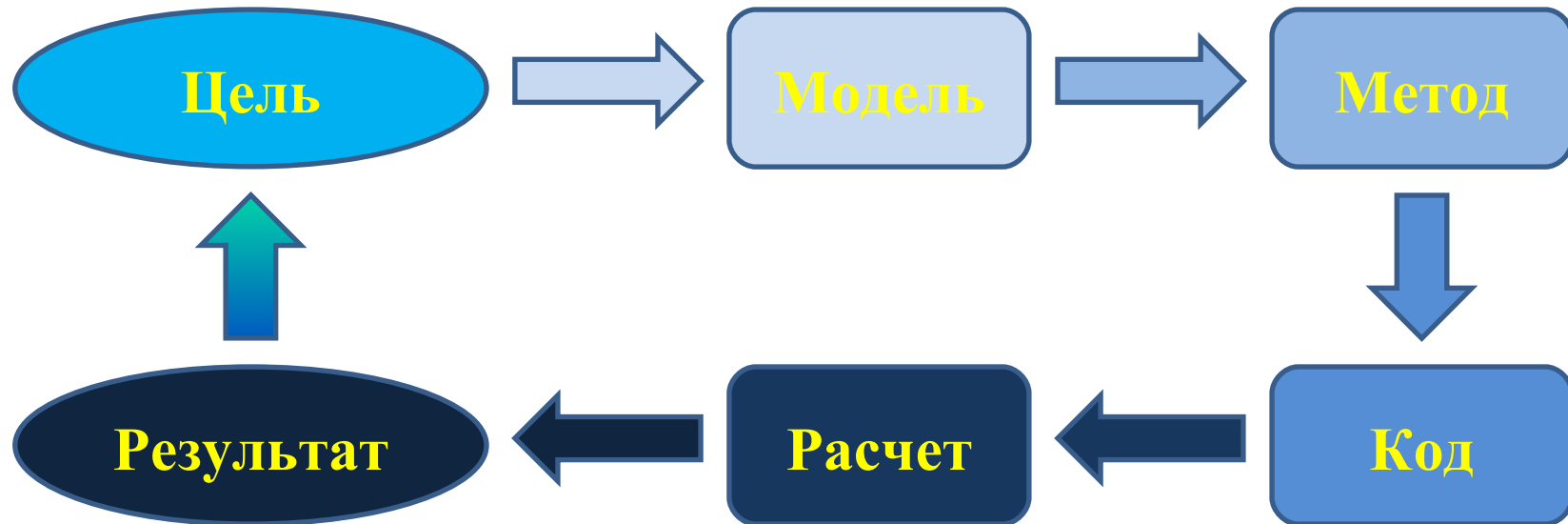
Однако наиболее важную роль в астрофизике играет **гравитационное** взаимодействие. Гравитация главным образом определяет эволюцию звездных систем и галактик, черных дыр, сжатие межзвездного газа и образование протозвезд. Велика роль гравитации в процессах аккреции, в том числе и в тесных двойных системах.

Блок-схема получения результата



$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = au^n$$



Февраль 2012 г.

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Том 182, № 2

ОБОЗРЬ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Структура течения в тесных двойных звёздах с учётом магнитного поля

А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало, А.А. Борзук

Для обзора рассмотрены представления о физических процессах, влияющих на обмен веществом между компонентами тесных двойных систем (ТДС). Основное внимание уделено структуре течения вещества в ТДС и физике аккреционных дисков. На основе результатов МГД-расчётов исследованы типичные основные характеристики аккреционных дисков в зависимости от величины и природы магнитного поля звезды-аккректора и параметров аккреции. В частности, установлено, что при определённых параметрах течения тороидального поля в диске приводит к чередованию режимов аккреции и дисперсии на внутренних частях диска. В рамках самосогласованного анализа структуры МГД-течений в ТДС сформулированы условия образования аккреционного диска и определены критерии, разделяющий два типа течений, соответствующих различным полярным полярам и поляркам. Обсуждаются вопросы использования результатов МГД-расчётов для интерпретации наблюдений.



```

CLASS_ID(NHyperbolicSolver);
class NHyperbolicSolver : public NPDESolver
{
    CLASS_INFO(NHyperbolicSolver);
public:
    explicit NHyperbolicSolver();
    ~NHyperbolicSolver();

    virtual void readSettings(urc::TSymbolTable& table);
    virtual void writeSettings(urc::TSymbolTable& table);

    virtual bool update();
    virtual bool execute();
  
```

Часть 2

НА ЧЁМ?

Вычислительные ресурсы



Параллельные вычисления

Большинство современных задач моделируются с использованием **суперкомпьютеров**, состоящих из множества параллельно работающих процессоров..



Вычислительные кластеры МСЦ РАН

MBC-15000BM



MBC-15000

Пиковая производительность **10.1 TFLOPS**. В июне 2006 года занял 70 место в списке Top500 и стал самым мощным российским суперкомпьютером.

В его состав входило 574 двухпроцессорных узла на базе процессоров IBM PowerPC 970FX, работающих на частоте 2.2ГГц и объединённых сетью Myrinet.

Вычислительные кластеры МСЦ РАН



MBC-6000

Предназначен для решения сложных научно-технических задач.

Пиковая производительность составляет **1.64 TFLOPS**.

Общий объем оперативной памяти решающего поля - 256 Гбайт.

Решающее поле состоит из 256 процессоров Intel Itanium 2.

Вычислительные кластеры МСЦ РАН



MBC-100K

Пиковая производительность **227.94 TFLOPS**. В настоящий момент является одним из самых мощных суперкомпьютеров СНГ.

В состав входят **1275** модуля, оснащенных двумя 4/6-ядерными процессорами Intel Xeon (всего **10572 ядра**).

Для объединения узлов в единое решающее поле используется технология Infiniband.

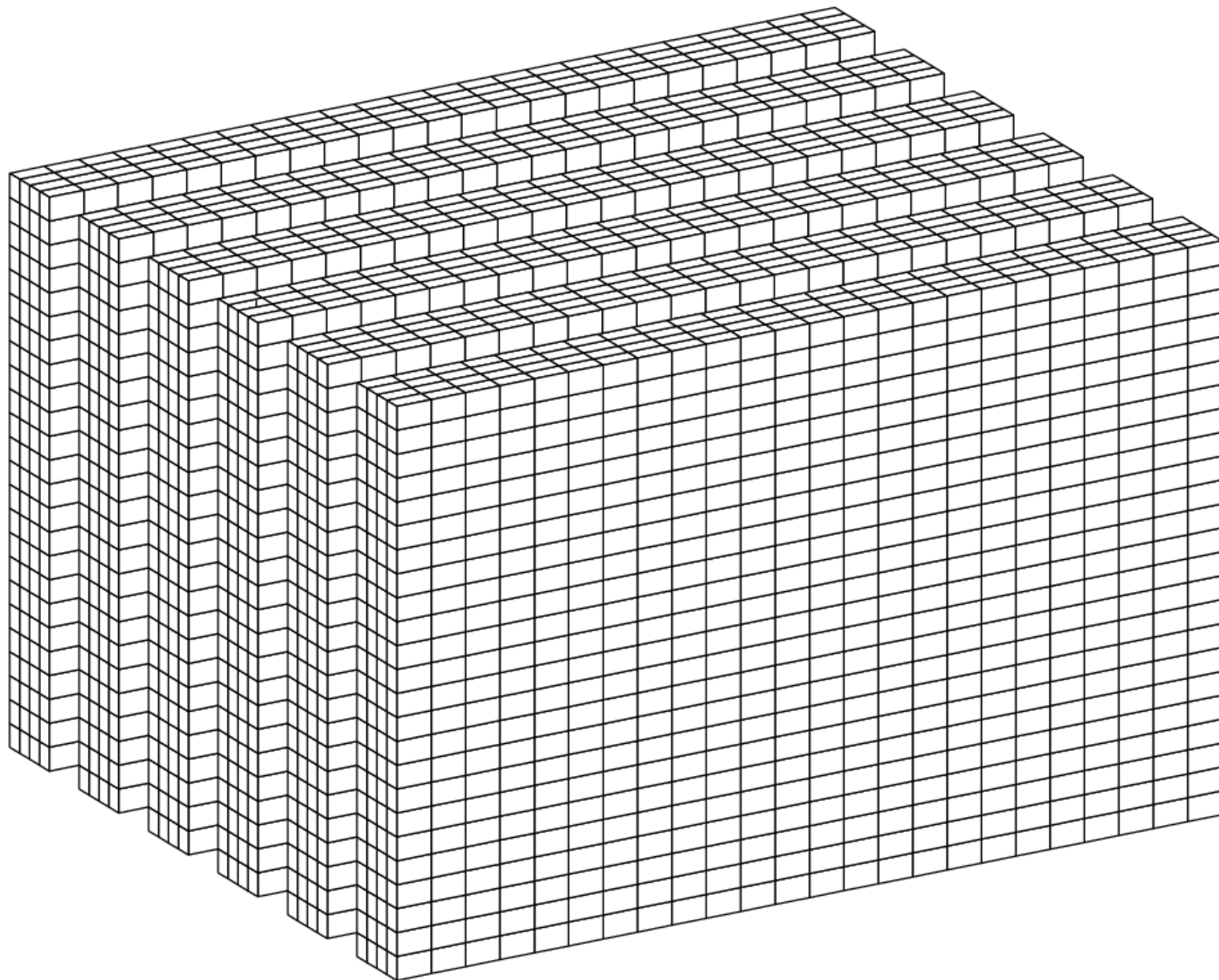
Методы распараллеливания

Требуется специальная адаптация численного кода к параллельной архитектуре.

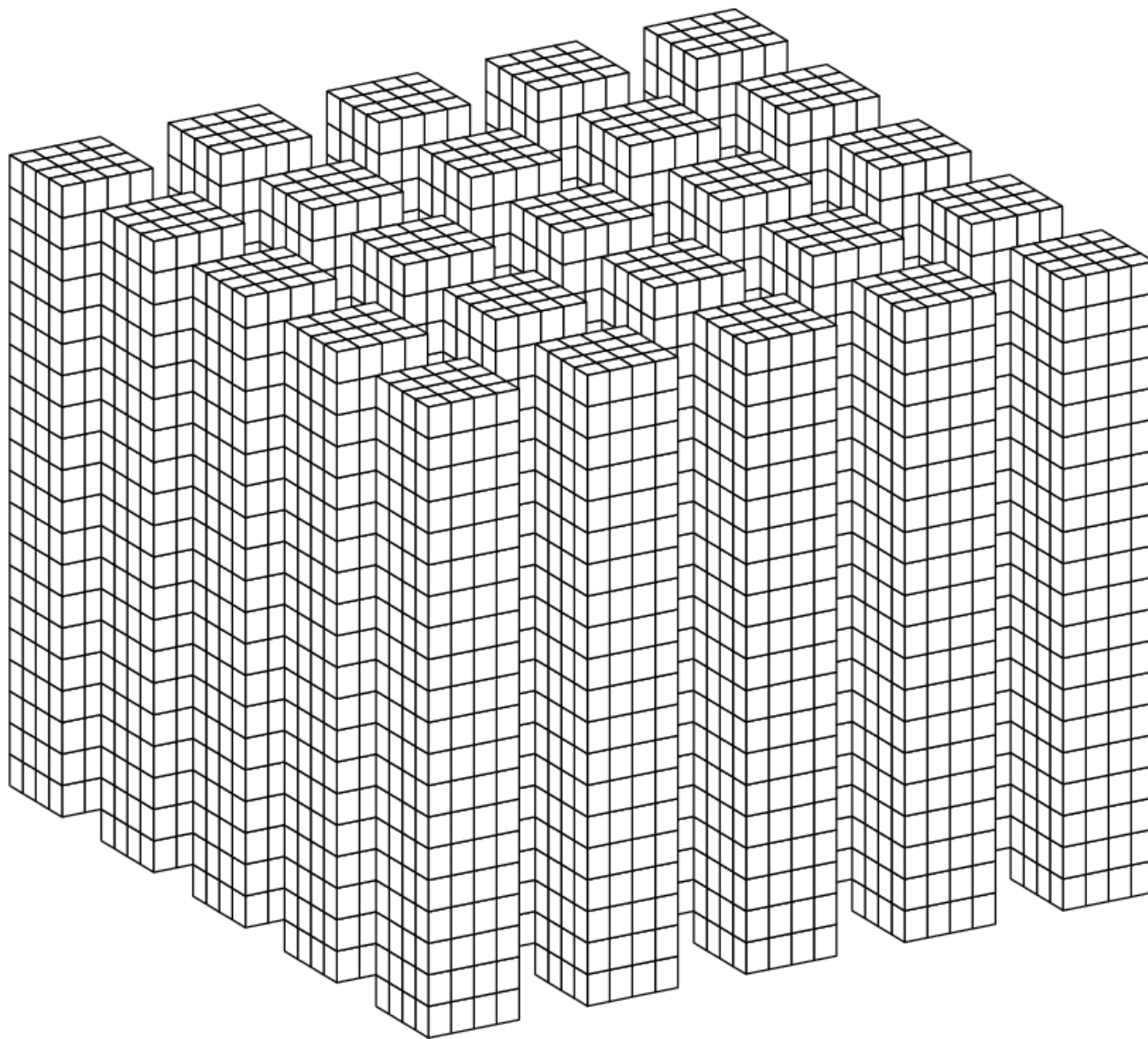
Явные методы могут быть адаптированы путем разбиения расчетной сетки на подобласти. При этом каждая подобласть обрабатывается одним процессором. Способ разбиения зависит от геометрии задачи и размерности расчетной области. Взаимодействие процессоров требуется только при переходе к следующему временному шагу.

Взаимодействие процессоров осуществляется путем пересылки данных от одного процессора к другому. Это необходимо для синхронизации значений на границах подобластей и временного шага.

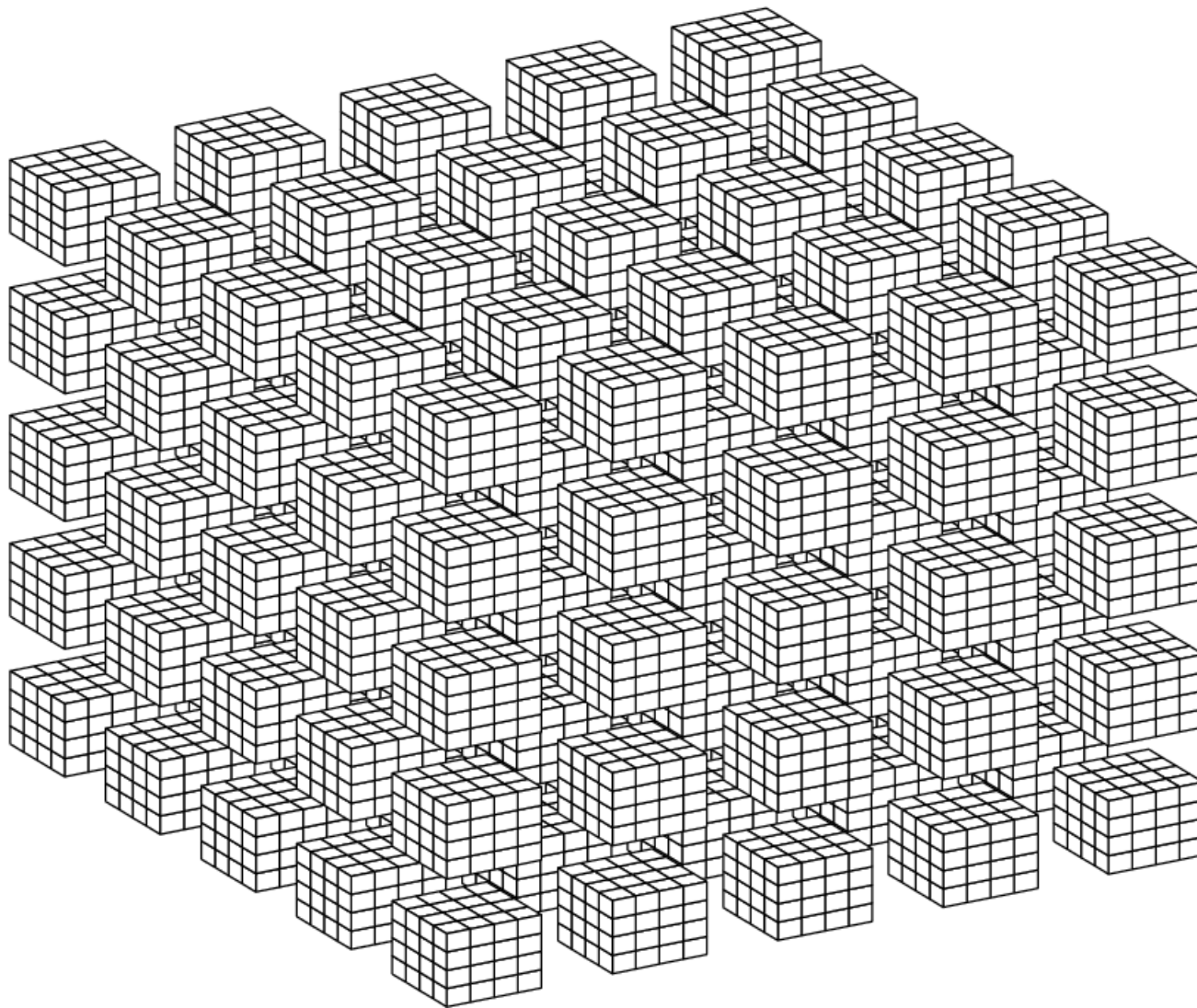
Методы распараллеливания



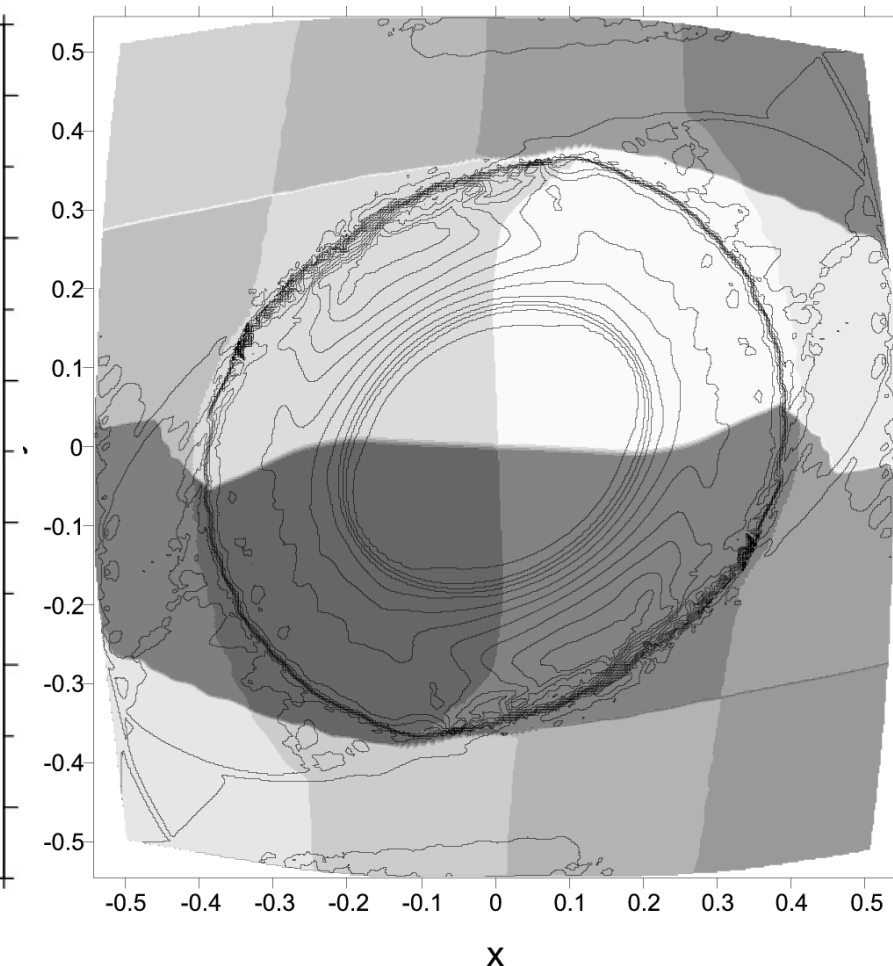
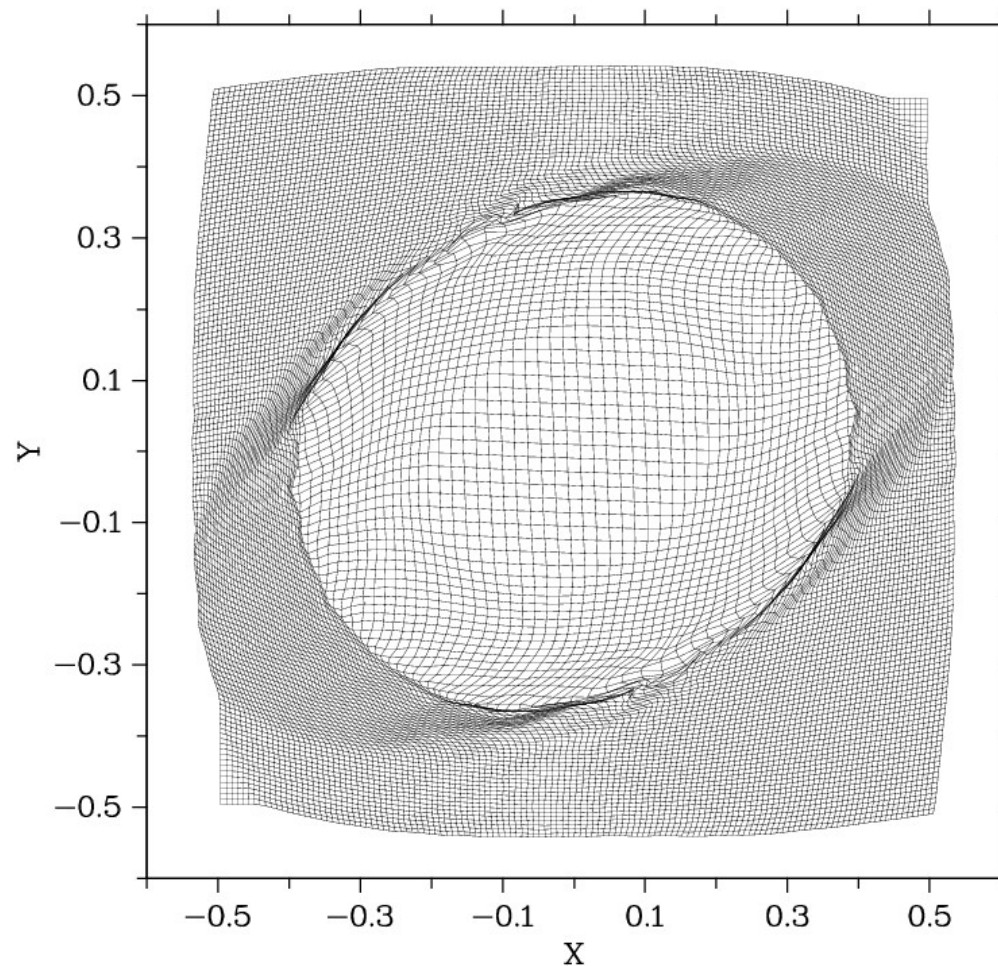
Методы распараллеливания



Методы распараллеливания

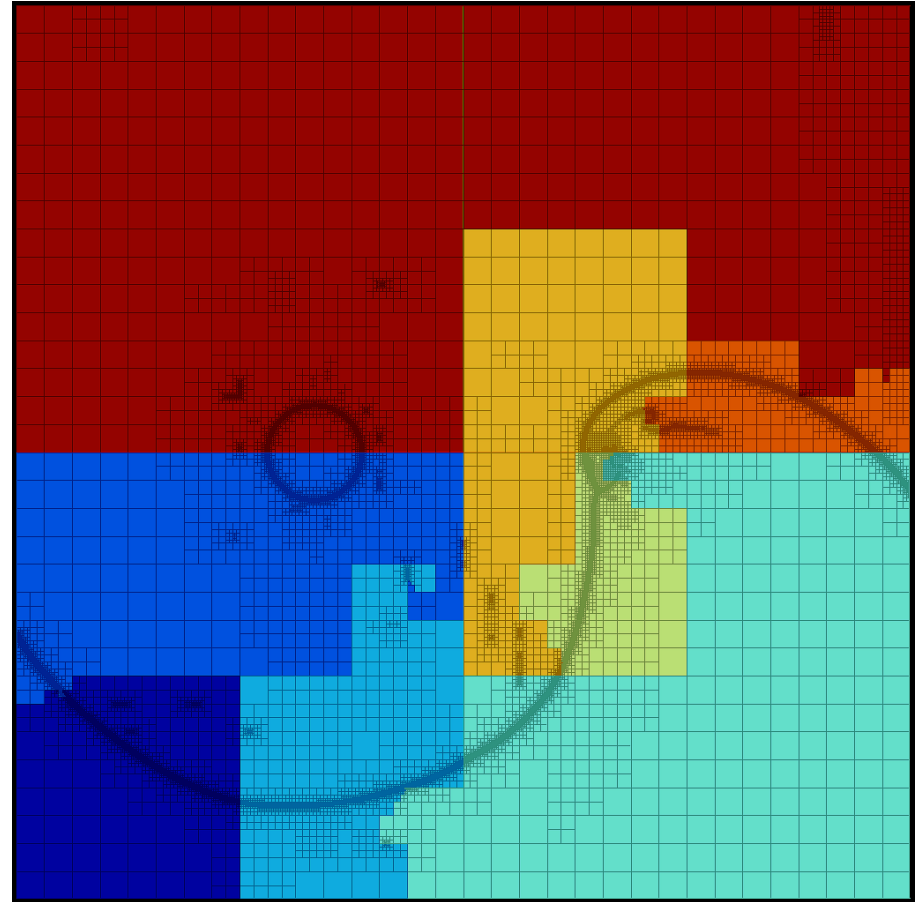
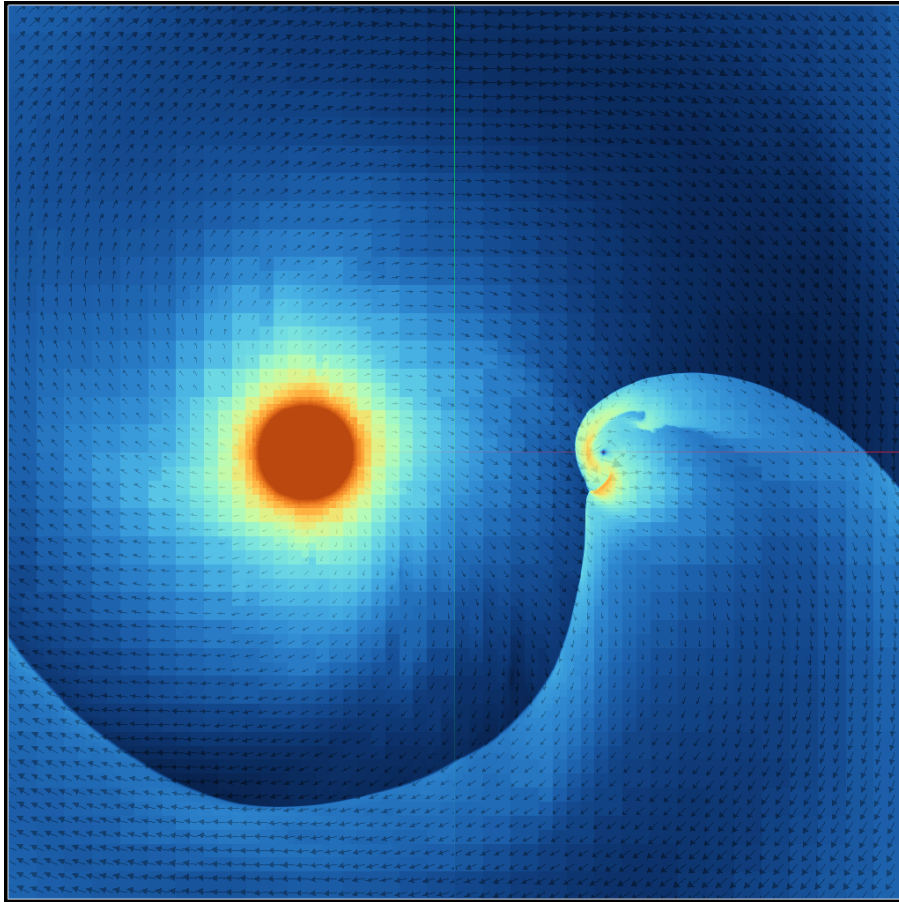


Методы распараллеливания



Разбиение расчетной области в случае неравномерной сетки.

Методы распараллеливания



Разбиение расчетной области в случае использования динамически адаптивной встраиваемой сетки.

Эффективность распараллеливания

Тестирование производительности параллельного численного кода проводится с помощью измерения времени, необходимого для расчета некоторого количества временных шагов.

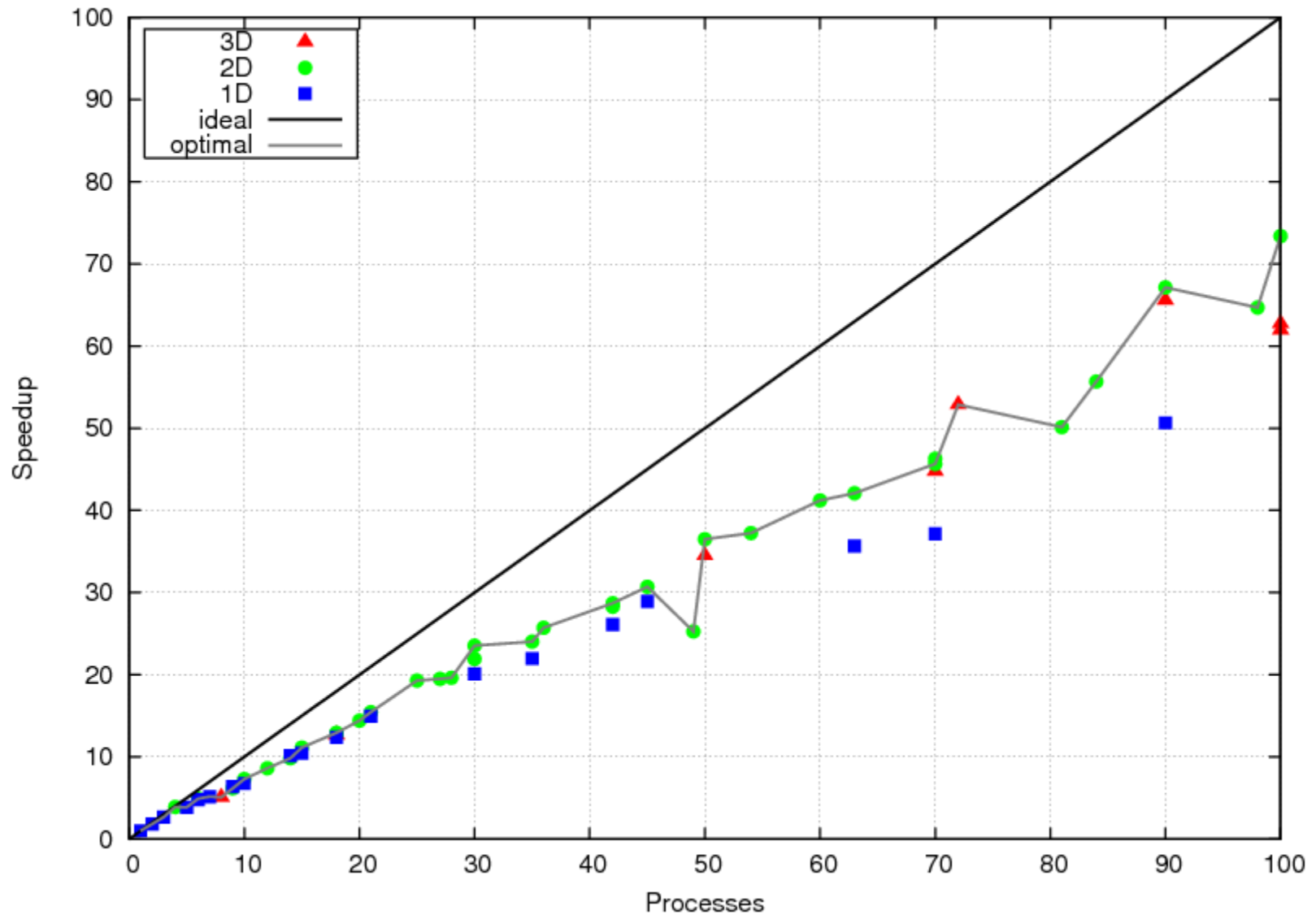
$$\mathbf{Spd} = \frac{T(1)}{T(N)}, \quad \mathbf{Eff} = \frac{\mathbf{Spd}}{N} 100\%.$$

$T(N)$ – время счета программы на N процессорах.

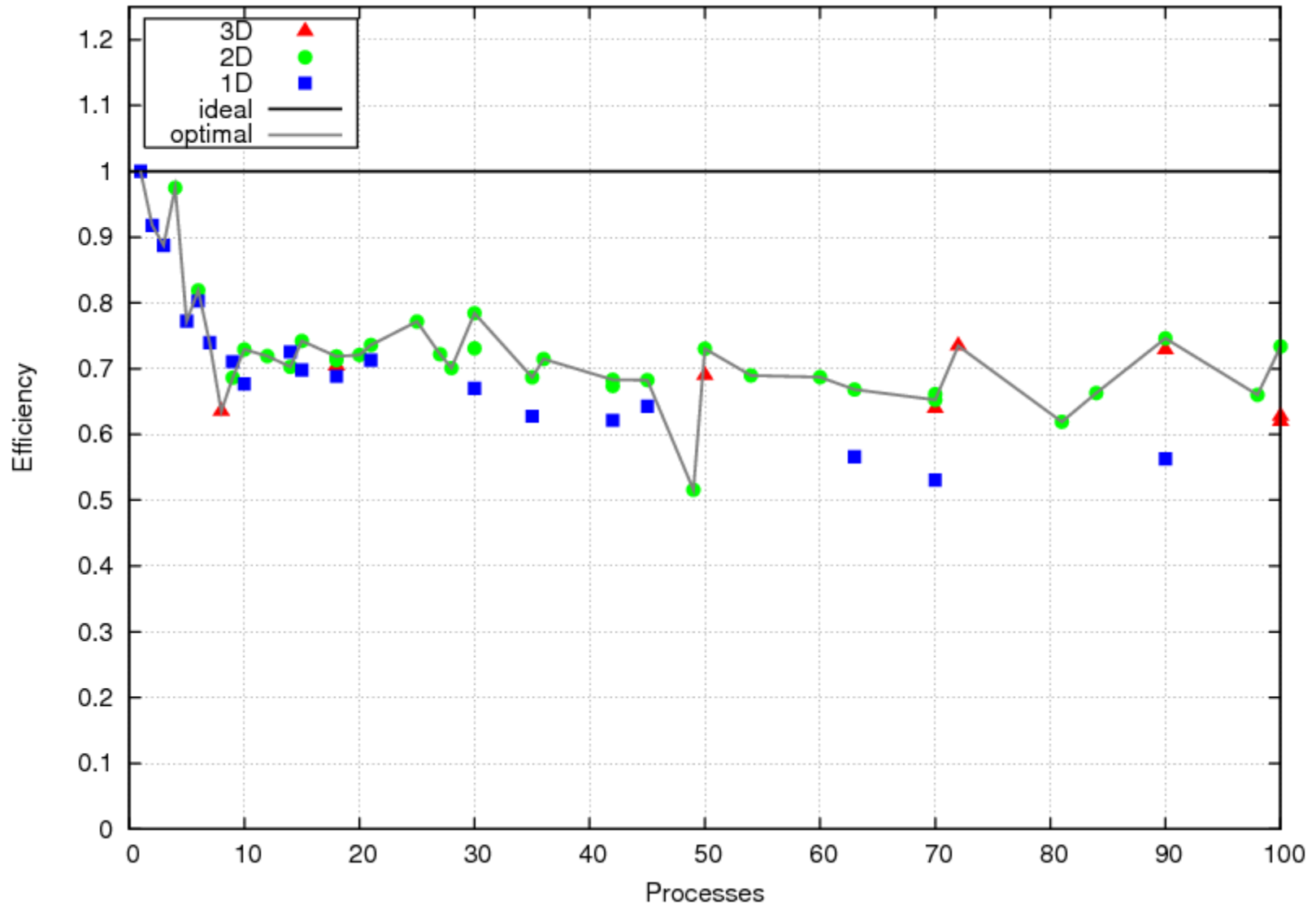
Spd определяет ускорение работы параллельной программы по сравнению с однопроцессорным вариантом.

Eff демонстрирует влияние накладных расходов (передача данных по сети) на время счета программы.

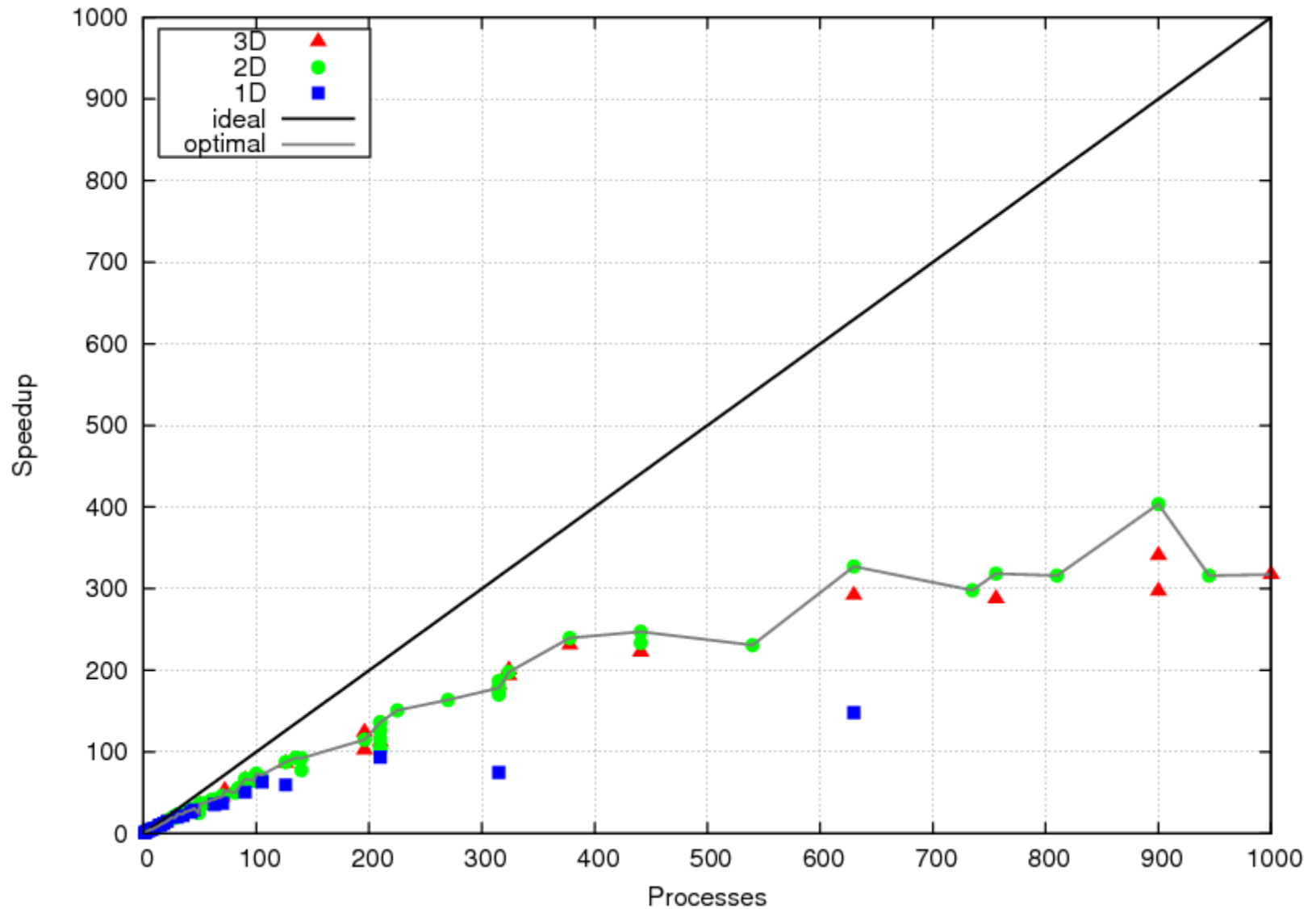
Эффективность распараллеливания



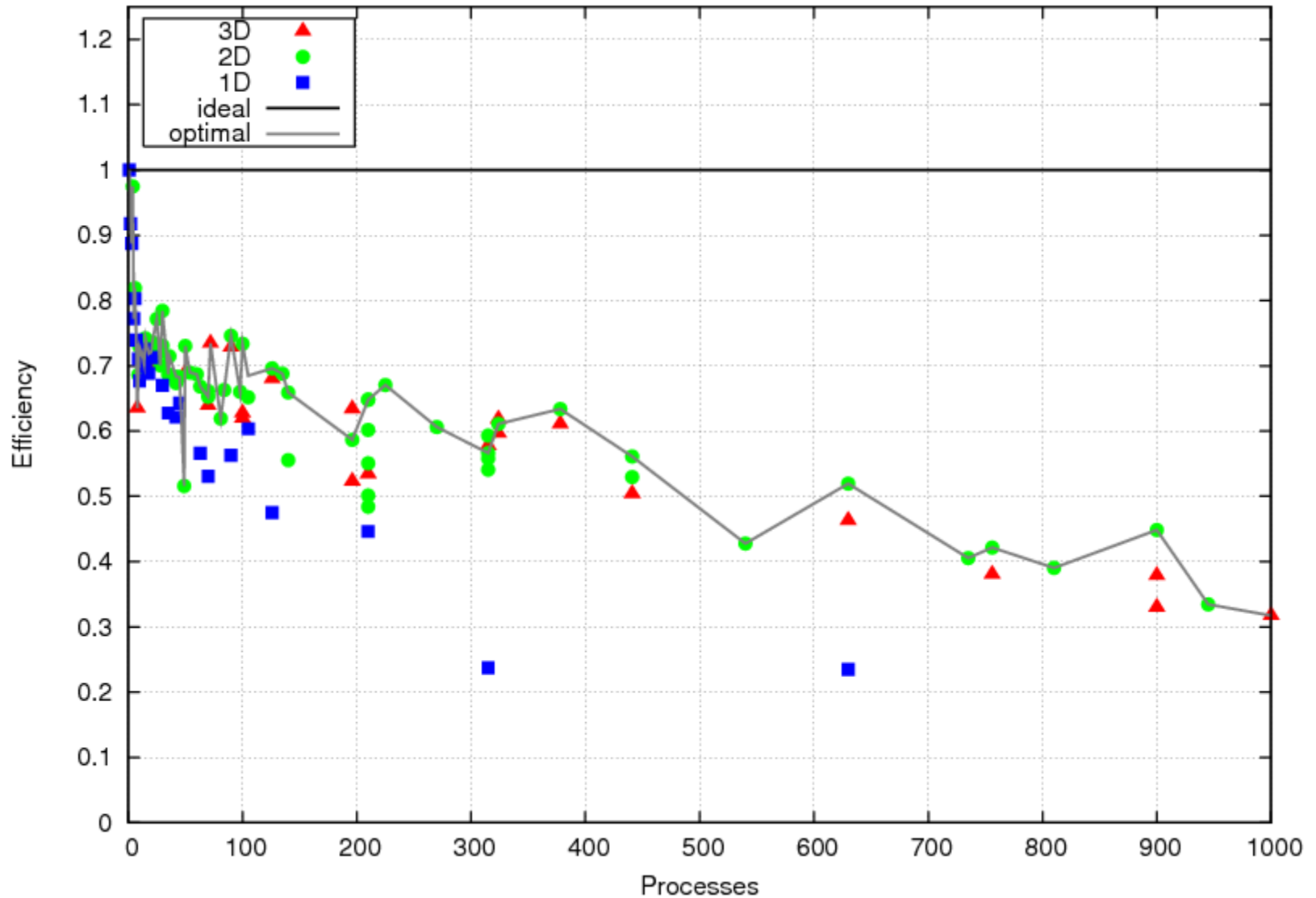
Эффективность распараллеливания



Эффективность распараллеливания

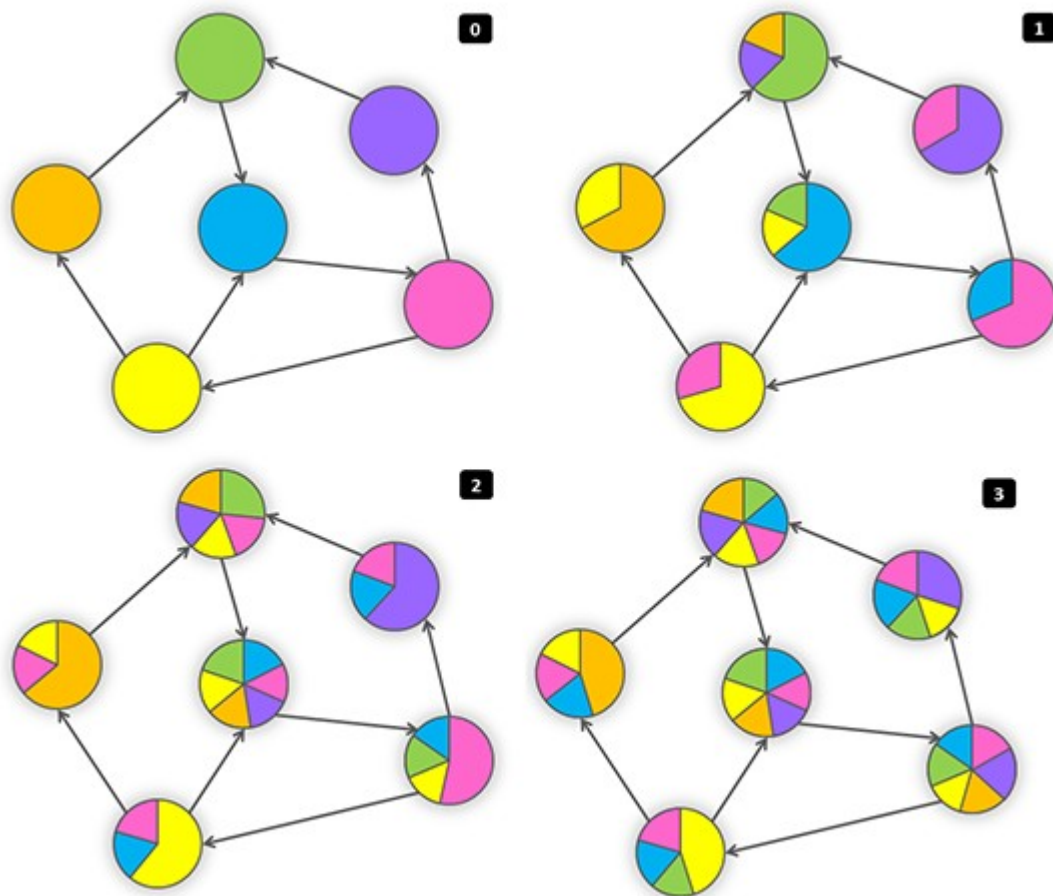


Эффективность распараллеливания



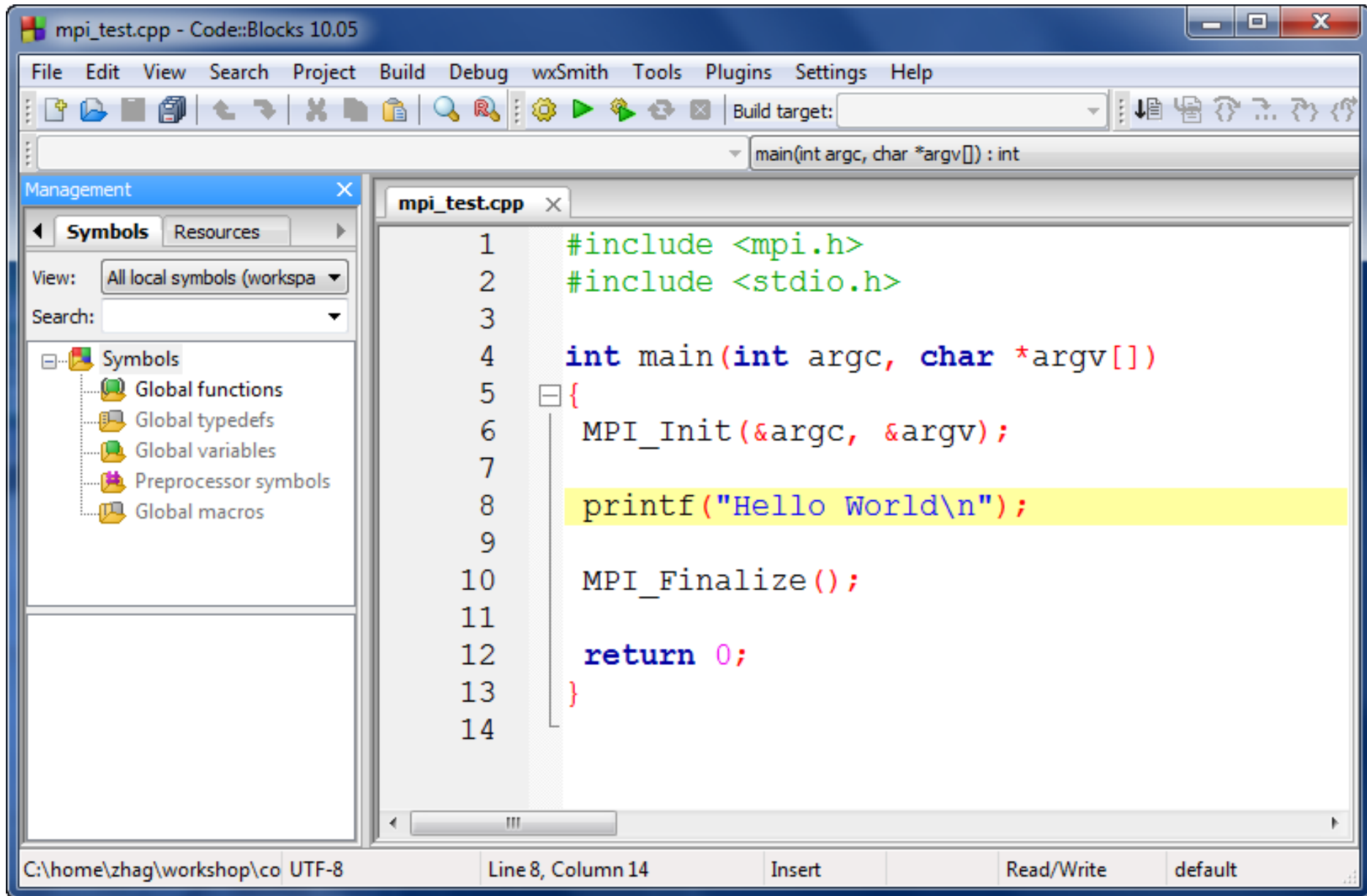
Параллельные программы

Система передачи сообщений – Message Passing Interface (MPI).

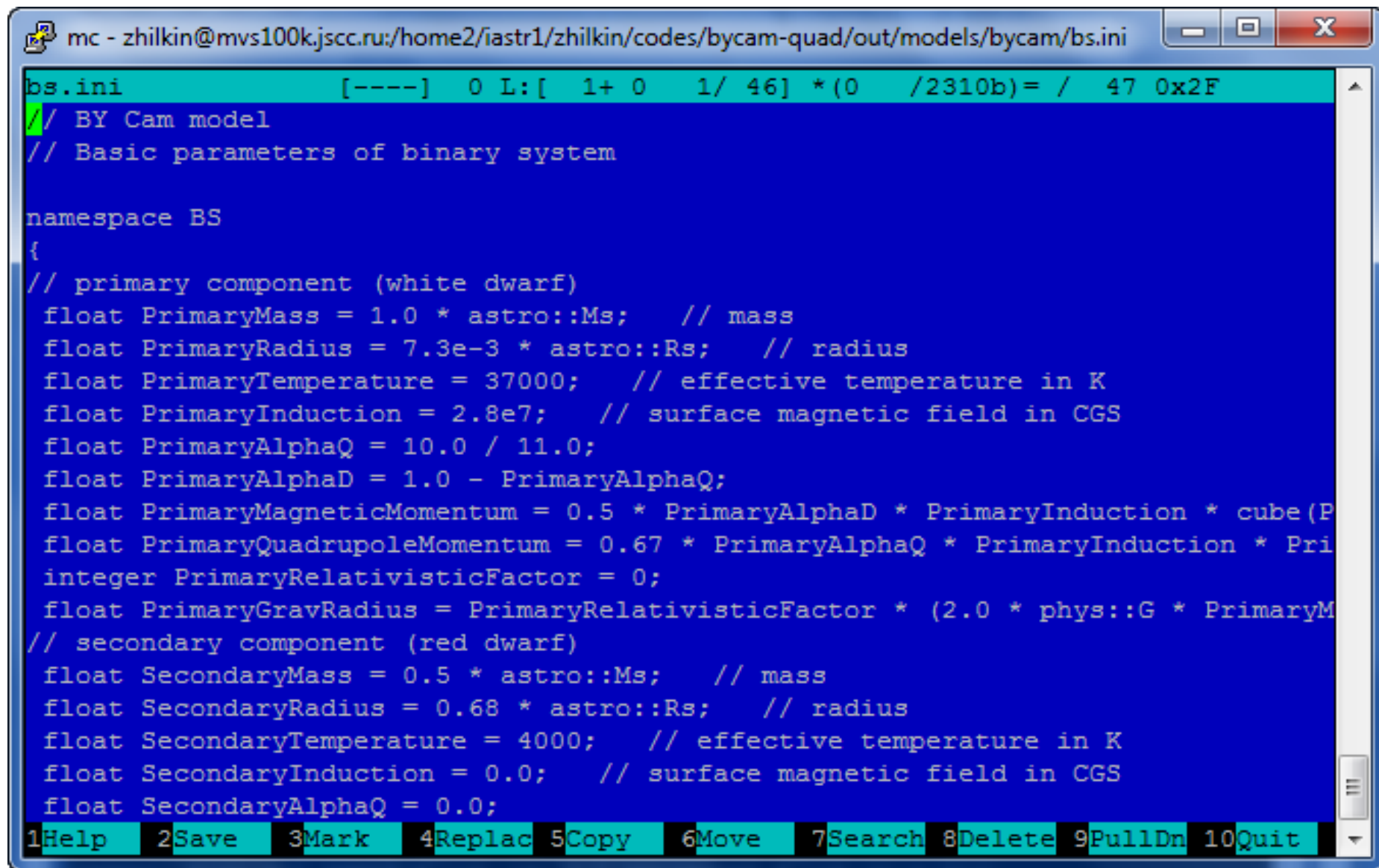


Процессы объединяются в группы в рамках своего **коммуникатора**. Коммуникаторы могут иметь различные **топологии**. Взаимодействие между процессами происходит в результате обмена сообщениями. Сообщения могут быть различного типа.

Параллельные программы



Параллельные вычисления

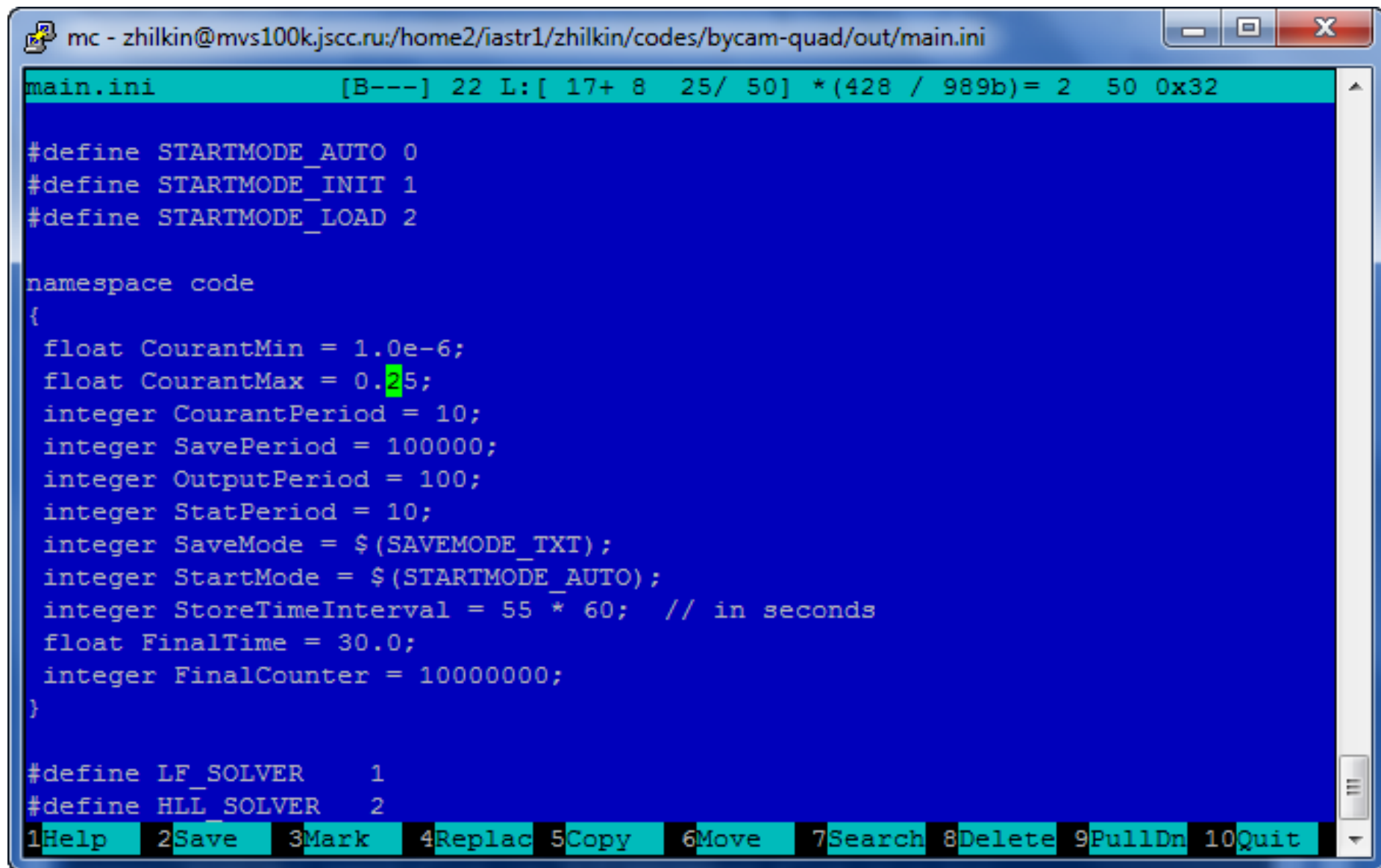


```
bs.ini      [----]  0 L:[  1+ 0   1/ 46] *(0   /2310b)= /  47 0x2F
// BY Cam model
// Basic parameters of binary system

namespace BS
{
// primary component (white dwarf)
float PrimaryMass = 1.0 * astro::Ms;    // mass
float PrimaryRadius = 7.3e-3 * astro::Rs;    // radius
float PrimaryTemperature = 37000;    // effective temperature in K
float PrimaryInduction = 2.8e7;    // surface magnetic field in CGS
float PrimaryAlphaQ = 10.0 / 11.0;
float PrimaryAlphaD = 1.0 - PrimaryAlphaQ;
float PrimaryMagneticMomentum = 0.5 * PrimaryAlphaD * PrimaryInduction * cube(P
float PrimaryQuadrupoleMomentum = 0.67 * PrimaryAlphaQ * PrimaryInduction * Pri
integer PrimaryRelativisticFactor = 0;
float PrimaryGravRadius = PrimaryRelativisticFactor * (2.0 * phys::G * PrimaryM
// secondary component (red dwarf)
float SecondaryMass = 0.5 * astro::Ms;    // mass
float SecondaryRadius = 0.68 * astro::Rs;    // radius
float SecondaryTemperature = 4000;    // effective temperature in K
float SecondaryInduction = 0.0;    // surface magnetic field in CGS
float SecondaryAlphaQ = 0.0;

1Help  2Save  3Mark  4Replac 5Copy  6Move  7Search 8Delete 9PullDn 10Quit
```

Параллельные вычисления



```
mc - zhilkin@mvs100k.jscc.ru:/home2/iastr1/zhilkin/codes/bycam-quad/out/main.ini
main.ini [B---] 22 L:[ 17+ 8 25/ 50] *(428 / 989b)= 2 50 0x32

#define STARTMODE_AUTO 0
#define STARTMODE_INIT 1
#define STARTMODE_LOAD 2

namespace code
{
    float CourantMin = 1.0e-6;
    float CourantMax = 0.25;
    integer CourantPeriod = 10;
    integer SavePeriod = 100000;
    integer OutputPeriod = 100;
    integer StatPeriod = 10;
    integer SaveMode = $(SAVEMODE_TXT);
    integer StartMode = $(STARTMODE_AUTO);
    integer StoreTimeInterval = 55 * 60; // in seconds
    float FinalTime = 30.0;
    integer FinalCounter = 10000000;
}

#define LF_SOLVER 1
#define HLL_SOLVER 2
1Help 2Save 3Mark 4Replac 5Copy 6Move 7Search 8Delete 9PullDn 10Quit
```


Параллельные вычисления

```
mc - zhilkin@mvs100k.jsc.ru:~/storage/codes/bycam-quad/out/nurgush.exe.1
145000: Time = 1.45216 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 21s)
145100: Time = 1.45316 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 21s)
145200: Time = 1.45416 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
145300: Time = 1.45516 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
145400: Time = 1.45616 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 20s)
145500: Time = 1.45717 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 20s)
145600: Time = 1.45817 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
145700: Time = 1.45917 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
145800: Time = 1.46017 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
145900: Time = 1.46117 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 20s)
146000: Time = 1.46217 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 21s)
146100: Time = 1.46317 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 20s)
146200: Time = 1.46418 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
146300: Time = 1.46518 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
Warning [Code]: Data stored
146400: Time = 1.46618 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 57s)
146500: Time = 1.46718 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
146600: Time = 1.46818 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
146700: Time = 1.46918 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 20s)
146800: Time = 1.47018 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 21s)
146900: Time = 1.47118 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 20s)
147000: Time = 1.47219 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 21s)
147100: Time = 1.47319 P_orb (dt = 1.00135e-05 P_orb rt = 20s)
147200: Time = 1.47419 P_orb (dt = 1.00136e-05 P_orb rt = 21s)
```

Пока код считает...



Часть 3

ЧТО?

Математические модели

Типы вычислительных задач

С математической точки зрения встречаются такие задачи:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Дифференциальные уравнения в частных производных.
3. Интегральные уравнения.
4. Интегро-дифференциальные уравнения.

В любом случае различные методы решения состоят в том, что исходная задача сводится к решению некоторой системы **линейных алгебраических уравнений**. Эта система затем решается на компьютере.

Метод расщепления

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \hat{L}u, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad t^{n+1} = t^n + \Delta t.$$

$$\hat{L} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots \hat{A}_P.$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \hat{A}_1 u_1, \quad u_1(t^n) = u(t^n), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1},$$

...

$$\frac{\partial u_P}{\partial t} = \hat{A}_P u_P, \quad u_P(t^n) = u_{P-1}(t^{n+1}), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1},$$

$$u(t^{n+1}) = u_P(t^{n+1}).$$

Метод расщепления

Этот подход позволяет сложную задачу разбить на более простые. В результате все индивидуальные задачи можно решать независимо друг от друга, а все получаемые изменения суммировать.

В комплексных многомерных задачах расщепление можно проводить по **пространственным направлениям**, и по **физическим процессам**. При расщеплении по направлениям получаем последовательность одномерных задач в каждом координатном направлении. При расщеплении по физическим процессам можно выделять гиперболическое ядро, а также другие (негиперболические) типы процессов: диффузию, самогравитацию, внешние силы, процессы нагрева и охлаждения, перенос излучения.

Уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

Уравнение непрерывности.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{div}) \mathbf{v} = - \frac{\operatorname{grad} P}{\rho} + \mathbf{f},$$

Уравнение движения.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{div}) \varepsilon + \frac{P}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

Уравнение энергии.

$$P = (\gamma - 1) \rho \varepsilon ,$$

Уравнение состояния.

$$\mathbf{f} = 2(\mathbf{v} \operatorname{rot}) - \operatorname{grad} \Phi .$$

Внешние силы.

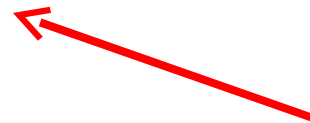
Уравнения магнитной газодинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{div}) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P - \frac{\mathbf{B} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}}{4\pi \rho} + \mathbf{f},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{div}) \varepsilon + \frac{P}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$



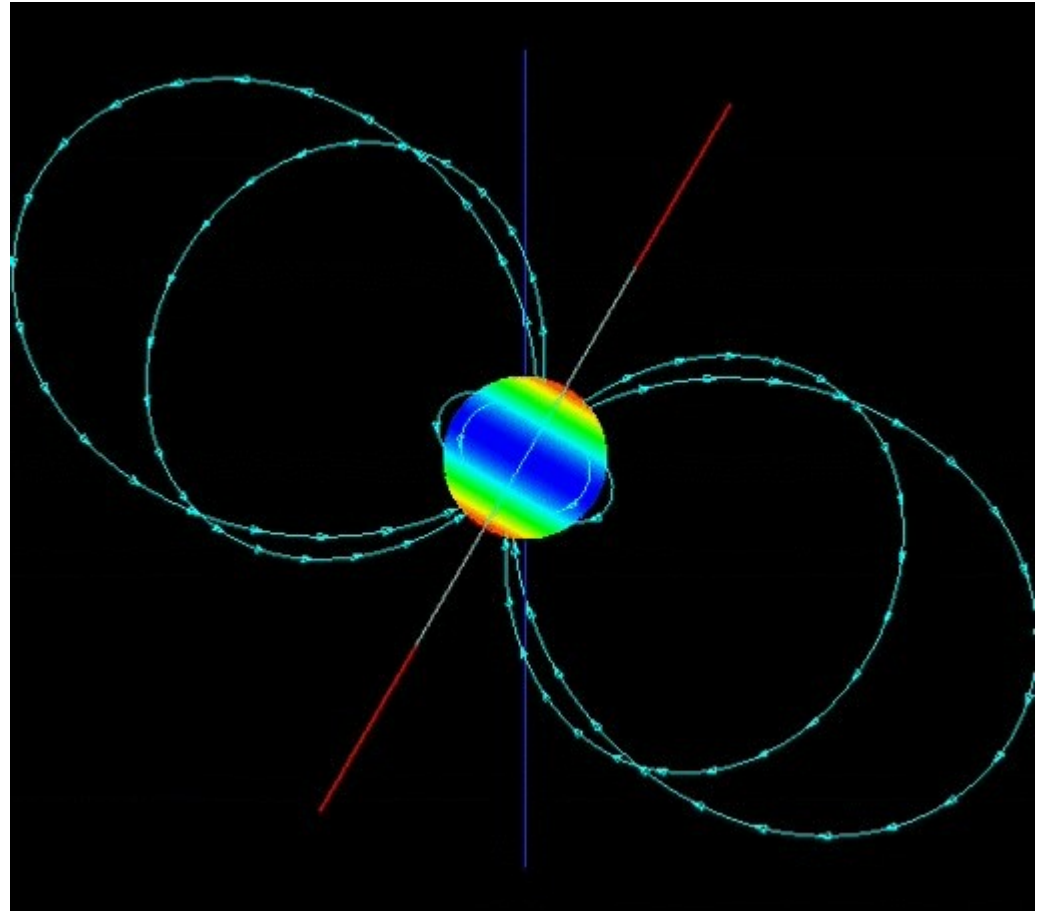
Уравнение индукции.

Учет других процессов

Магнитное поле
компактного объекта.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b},$$

$$\mathbf{B}_* = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}.$$

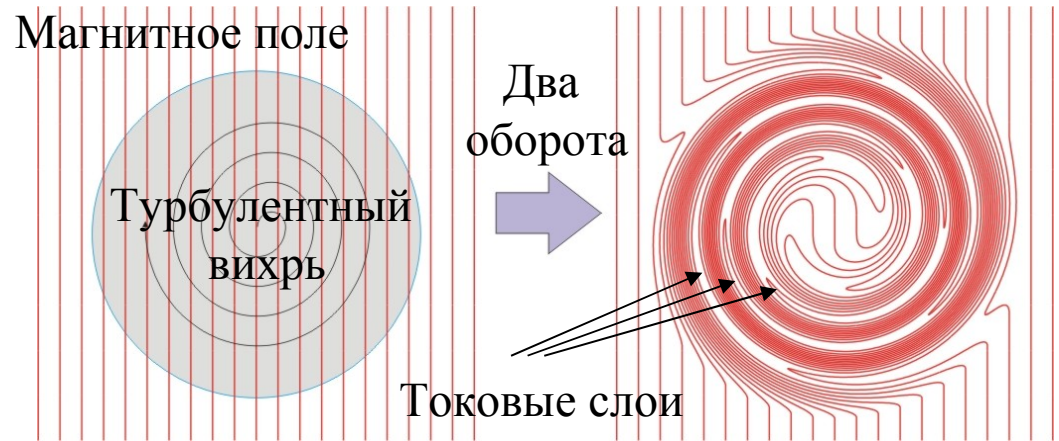


В численной модели удобнее вычислять не полное магнитное поле, а только поле $\mathbf{b}$, индуцированное токами в плазме.

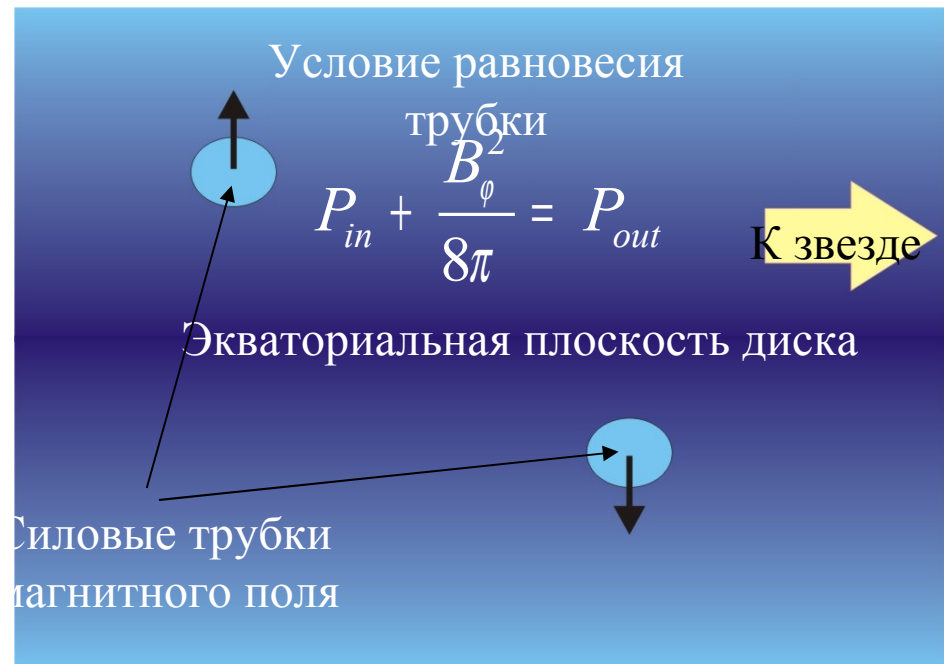
Учет других процессов

Диффузия магнитного поля .

1. Диссипация токов в турбулентных вихрях аккреционного диска.

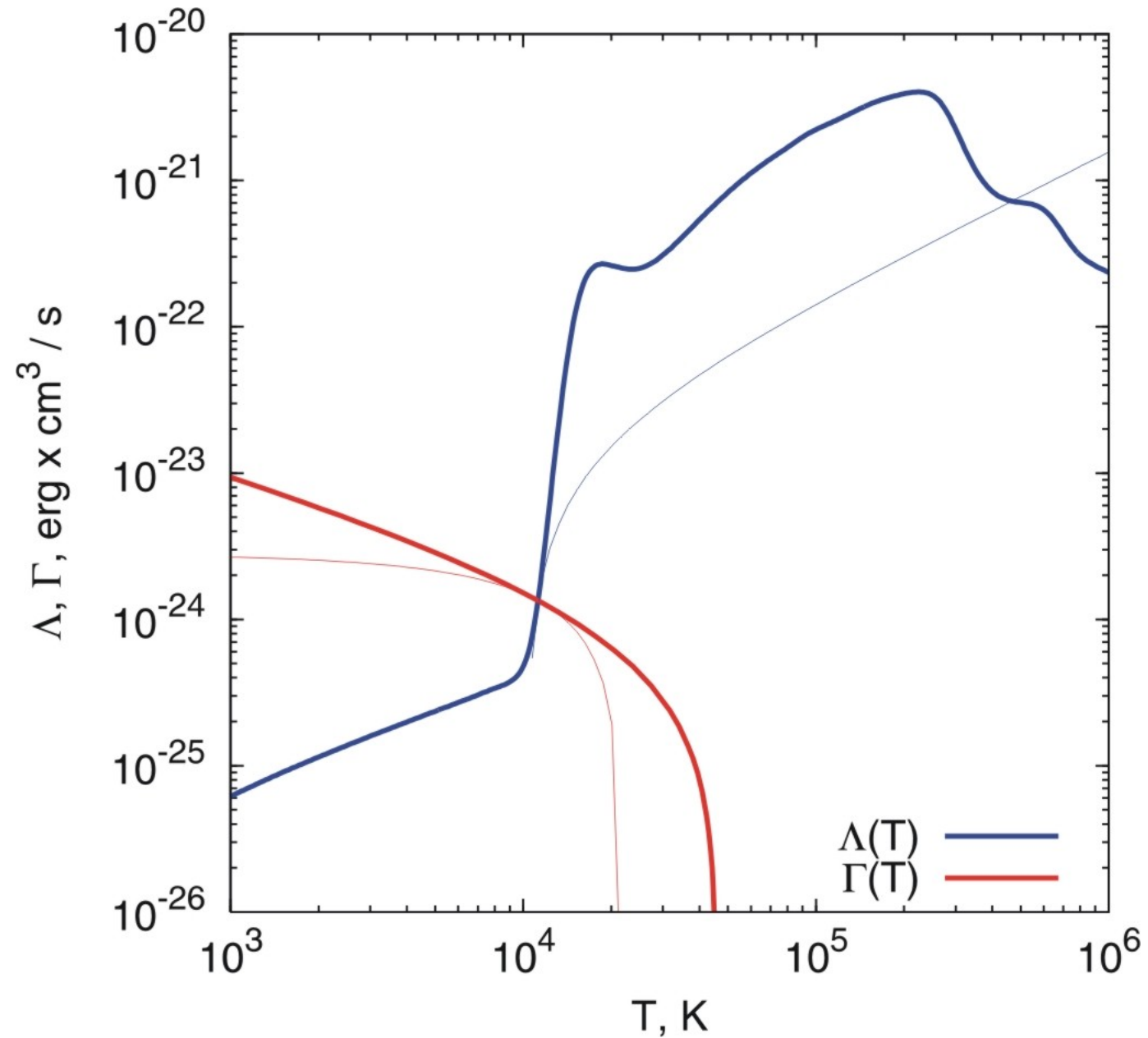


2. Плавучесть силовых трубок тороидального магнитного поля в аккреционном диске.



Учет других процессов

Процессы
нагрева и
охлаждения.



Часть 4

КАК?

Методы расчета

Дискретизация

Для численного решения дифференциальных уравнений необходимо перейти от дифференциальных операторов к **конечным разностям**.

В результате такой **аппроксимации** исходная система дифференциальных уравнений перейдет в систему алгебраических уравнений. Точность в общем случае будет тем выше, чем больше количество этих алгебраических уравнений.

Дискретизация расчетной области сводится к замене непрерывных переменных их дискретными аналогами. При этом вся расчетная область разбивается на конечное число ячеек.

Дискретизация

Способы аппроксимации могут отличаться в зависимости от вида и смысла дифференциального оператора.

Метод конечных разностей

Представление производных конечными разностями.

Метод конечных объемов

Использование интегральных законов сохранения.

Метод конечных элементов

Задача формулируется с помощью функций, каждая из которых задана в своей подобласти.

Спектральный метод

Решение представляется в виде конечной суммы по базисным функциям.

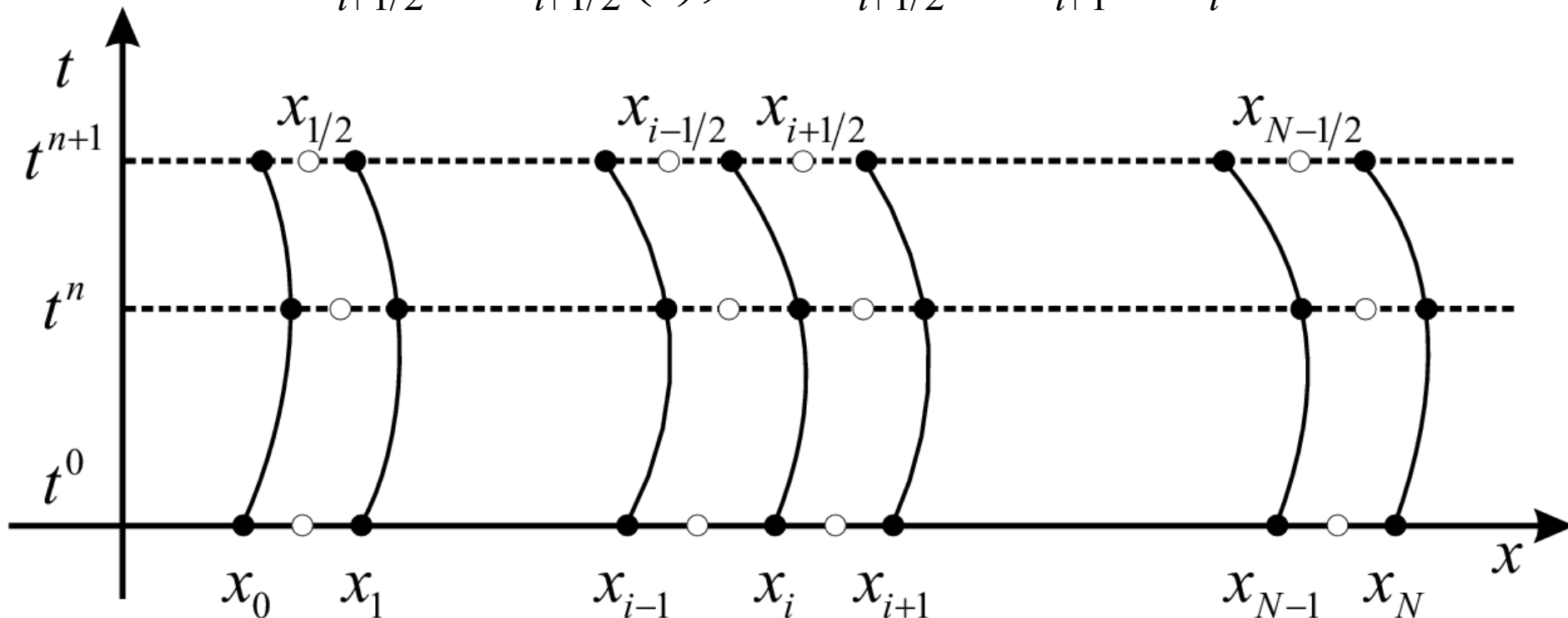
Дискретизация

Пример дискретизации одномерной расчетной области.

$$a \leq x \leq b, \quad t \geq 0.$$

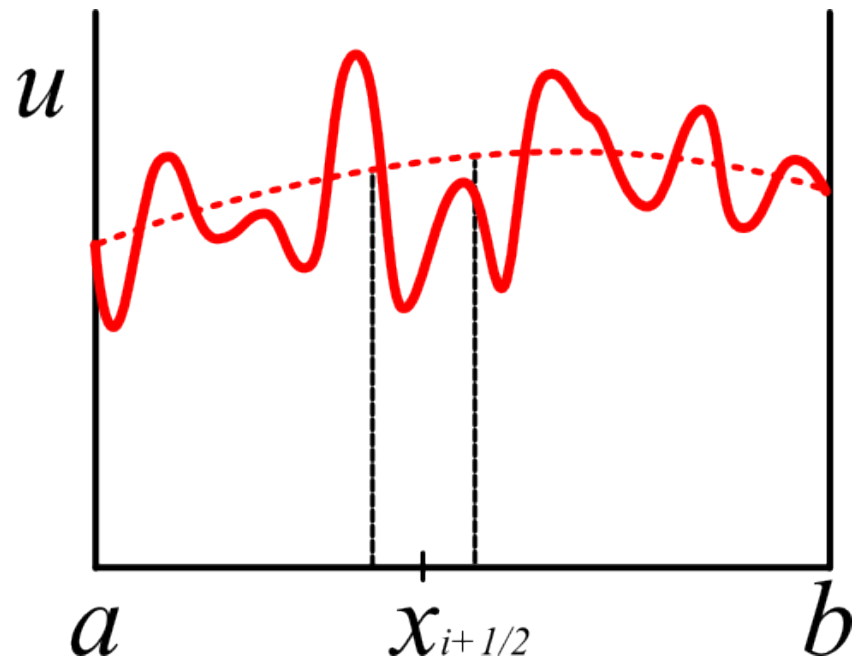
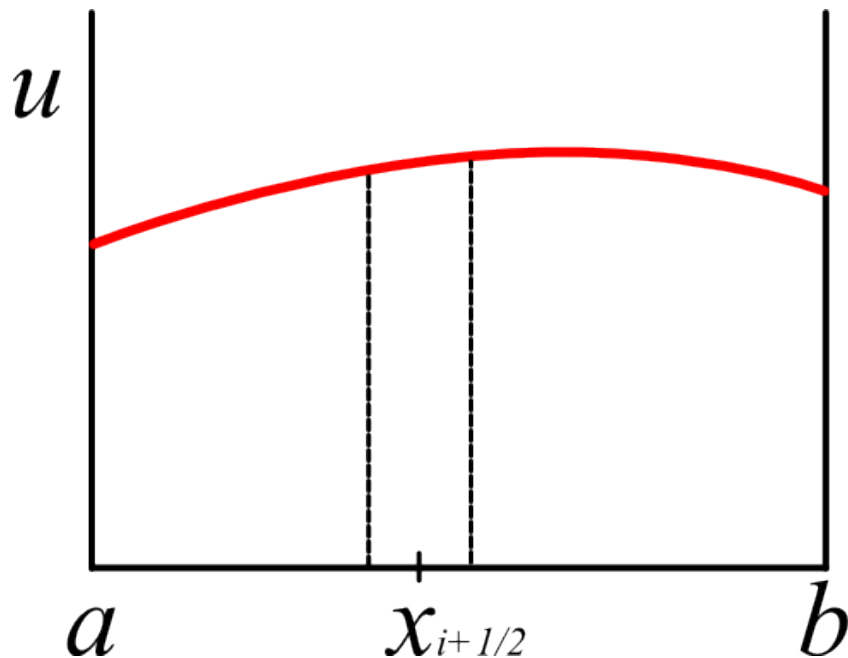
$$x_i = x_i(t), \quad x_0(0) = a, x_N(0) = b;$$

$$x_{i+1/2} = x_{i+1/2}(t), \quad \Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i.$$



Дискретный анализ Фурье

При дискретизации часть информации неминуемо теряется. Возникает некоторая неопределенность в значениях величин. Два примера дискретизации величины $u(x)$. Набор значений в узлах u_i дает неполное представление исходной величины $u(x)$. Но чем больше узлов, тем лучше представление.



Дискретный анализ Фурье

Сеточные функции u_i разлагаются в конечные суммы Фурье:

$$u_j = \sum_{k=1}^N u(k) e^{2\pi i k \frac{j}{N}}, \quad u(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j e^{-2\pi i k \frac{j}{N}}.$$

Таким образом, при дискретизации теряется вся **коротковолновая** (большие значения k) информация о решении. Набор значений сеточной функции u_i описывает только длинноволновую (длина волны $\lambda > 2\pi/N$) часть информации о исходной величине $u(x)$. Чем больше N , тем более короткие длины волн можно учесть. В пределе при $N \rightarrow \infty$, дискретное Фурье-разложение переходит в Фурье-представление для непрерывных функций. Дискретный Фурье-анализ можно использовать для более тонкого анализа разностных схем.

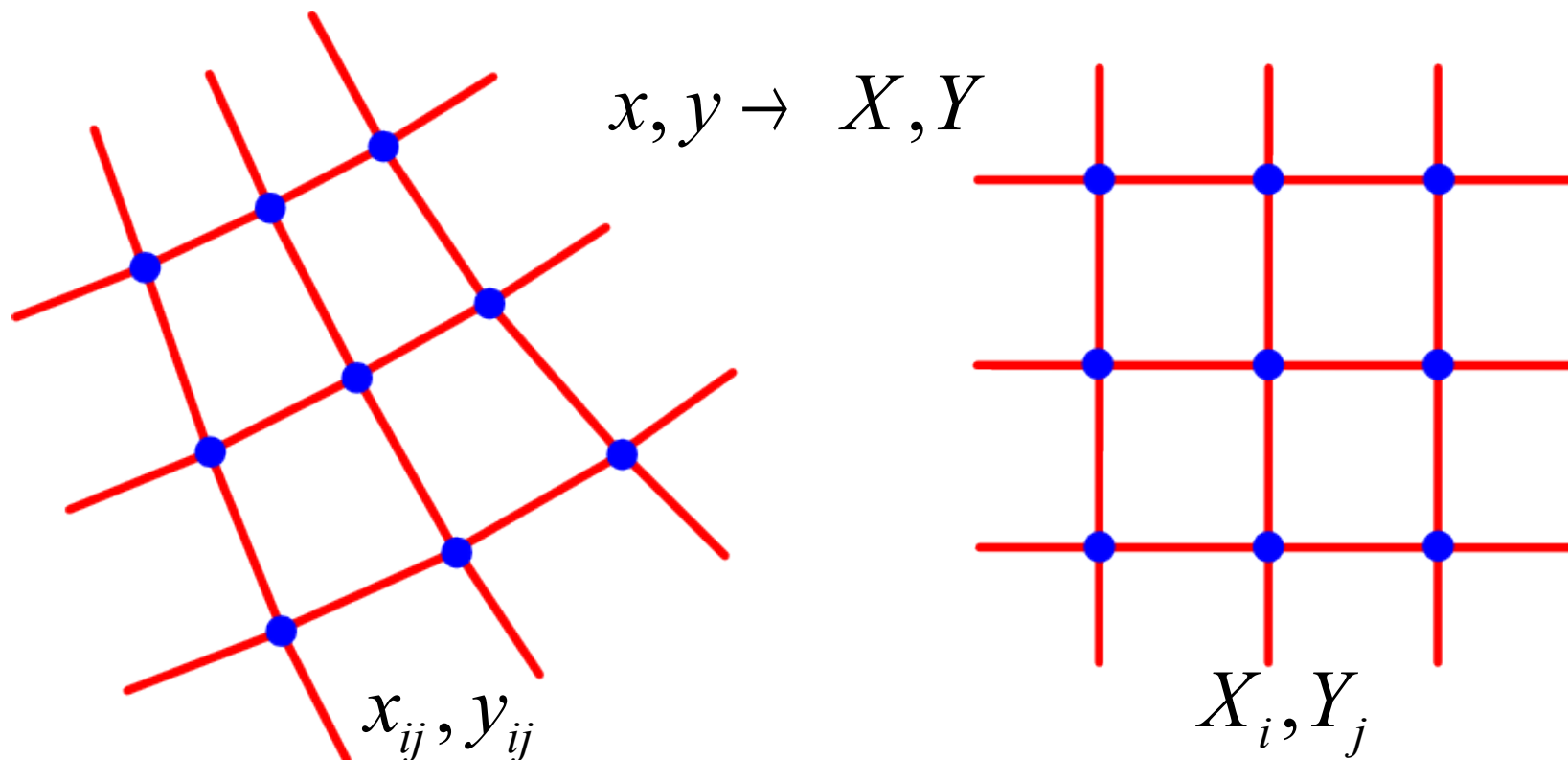
Расчетные сетки

Все расчетные сетки по типу логических связей между узлами можно разделить на два типа: **структурированные** и **неструктурированные**.

Структурированные расчетные сетки определяются упорядоченной структурой узлов с явно выраженными сеточными направлениями. В общем случае эти направления можно трактовать как оси некоторой криволинейной системы координат. Ячейки такой сетки являются топологическими прямоугольниками (двумерный случай) или параллелепипедами (трехмерный случай). Узлы такой сетки упорядочены по индексам:

$$\mathbf{r}_{ijk}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y, \quad k = 1, \dots, N_z.$$

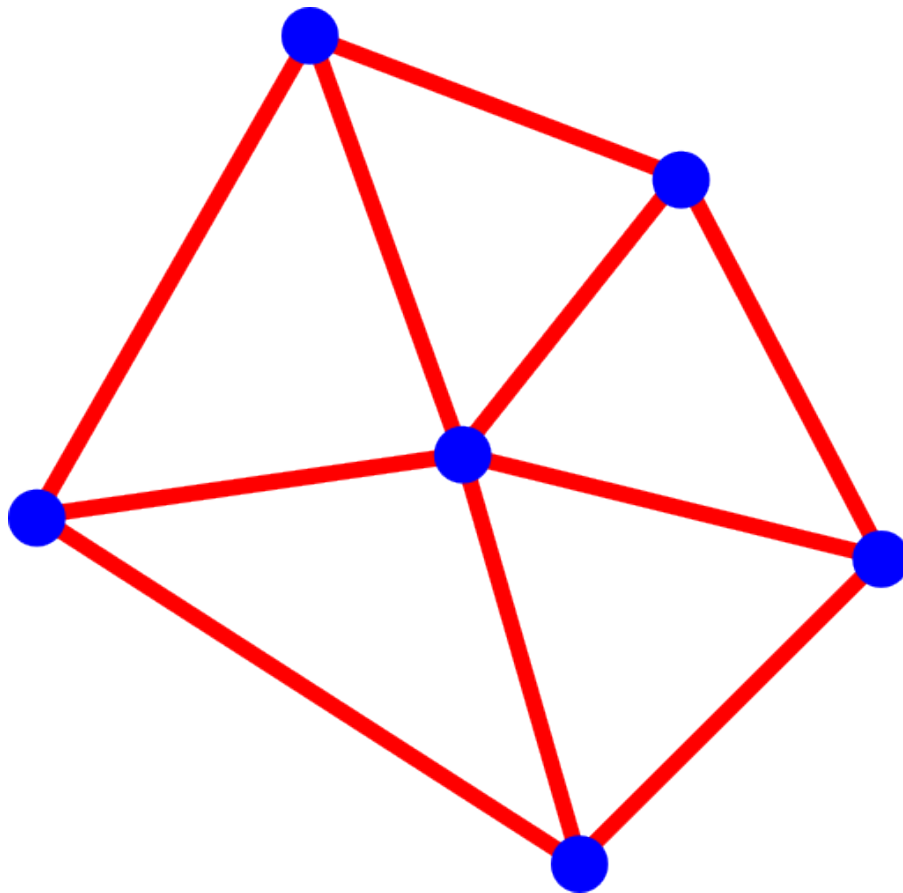
Расчетные сетки



В криволинейной системе координат (X, Y) , определяющейся сеточными направлениями (индексами), структурированная сетка является равномерной по всем координатам.

Расчетные сетки

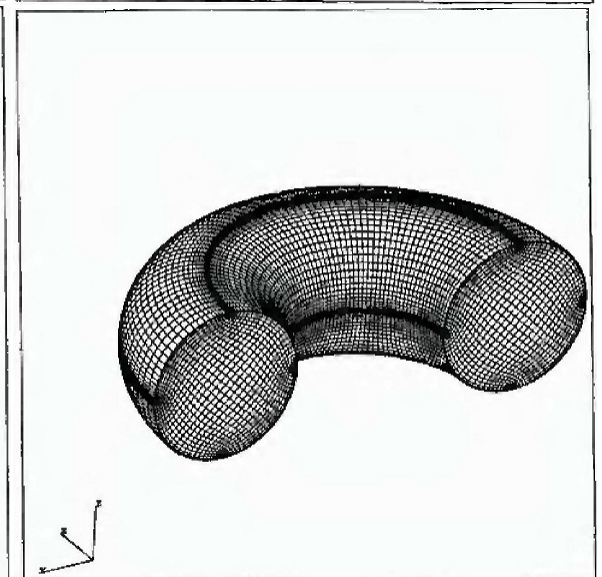
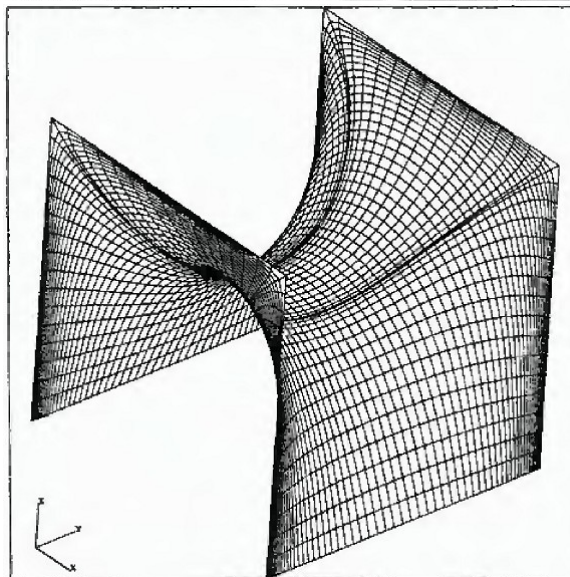
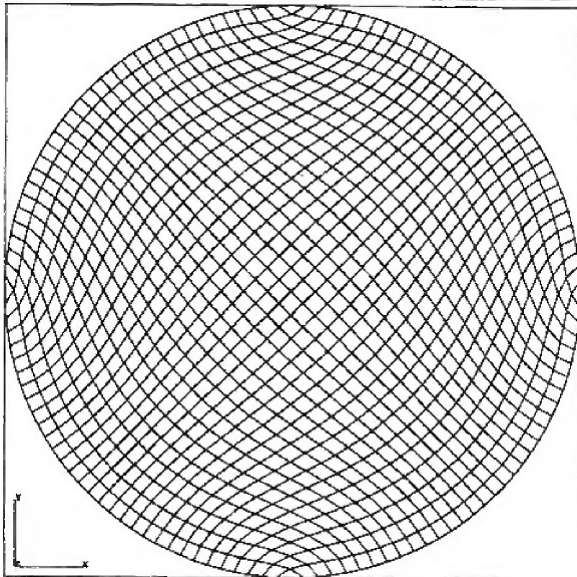
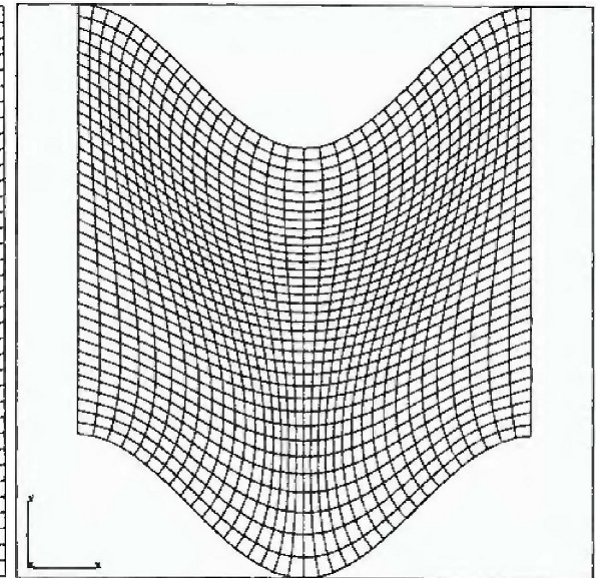
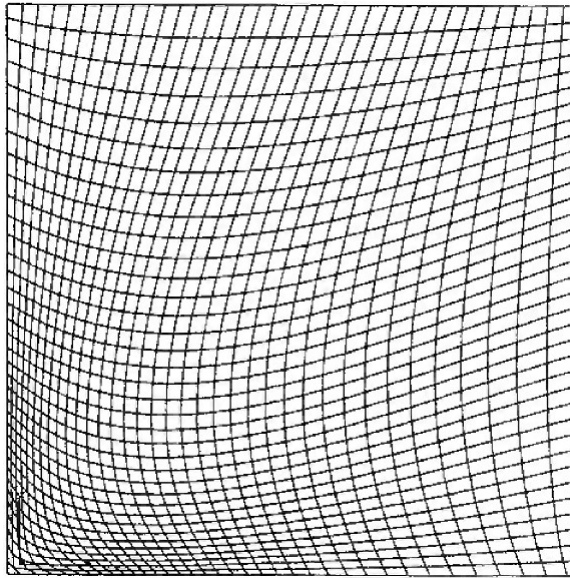
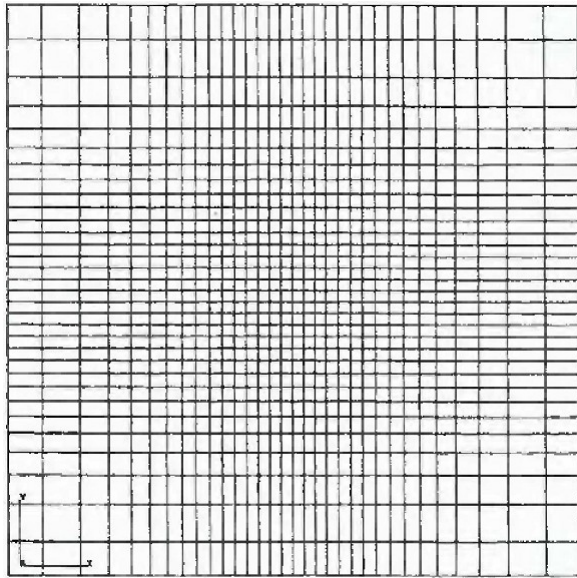
Неструктурированные сетки определяются простым набором узлов



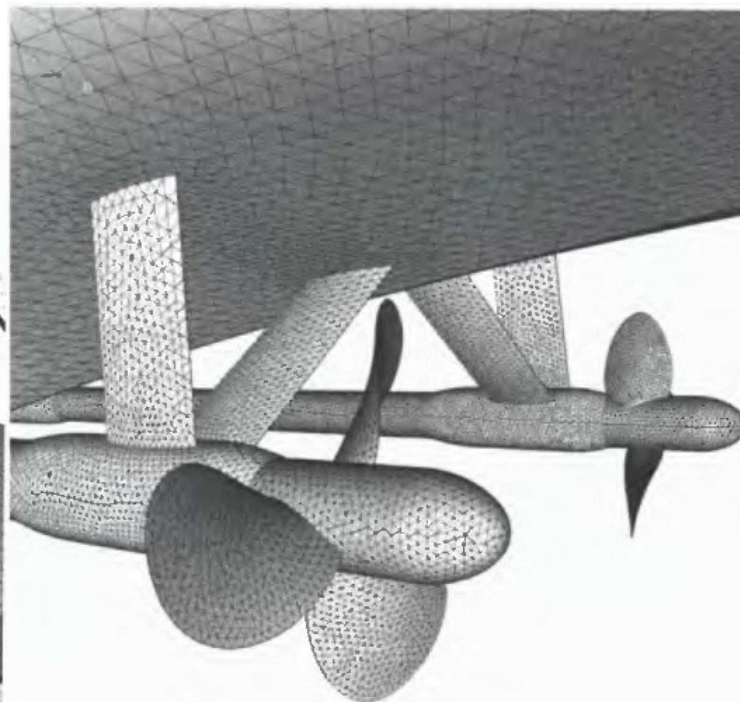
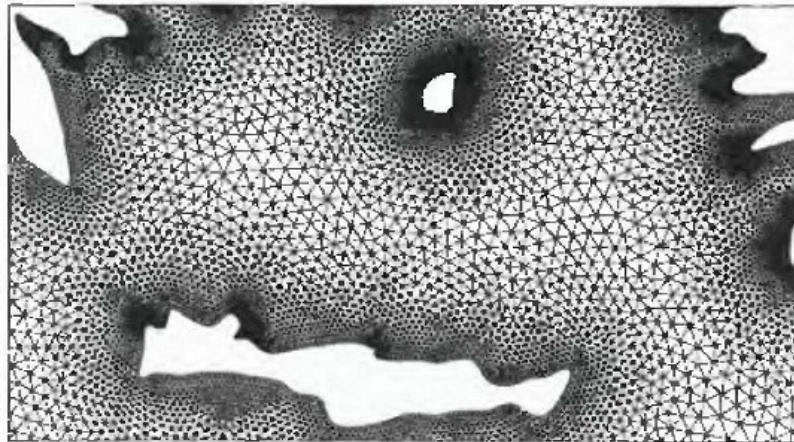
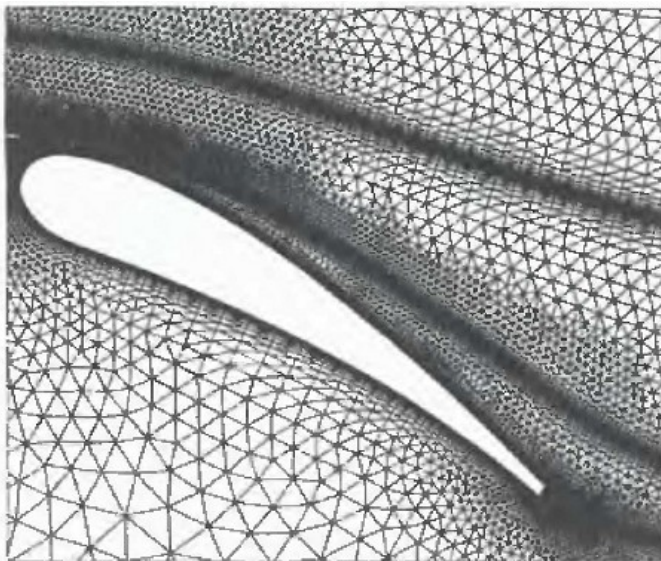
$$\mathbf{r}_I, \quad I = 1, \dots, N.$$

Логическая связь между узлами сетки задается произвольным образом. Как правило для этого используются треугольные ячейки. Для этого можно использовать алгоритм триангуляции Делоне.

Расчетные сетки



Расчетные сетки



Адаптация сеток

Адаптивными называются сетки, каким-либо образом приспособляющиеся к особенностям течения. Они позволяют без увеличения вычислительных затрат повышать точность расчета. В основе всех методов построения адаптивных сеток положен принцип оптимального распределения узлов сетки в расчетной области. Это распределение узлов должно учитывать взаимное расположение и скорости отдельных подобластей с какими-либо особенностями течения: большие градиенты, сильные разрывы, межфазные границы и т.п.

Адаптивные сетки можно разделить на два типа:

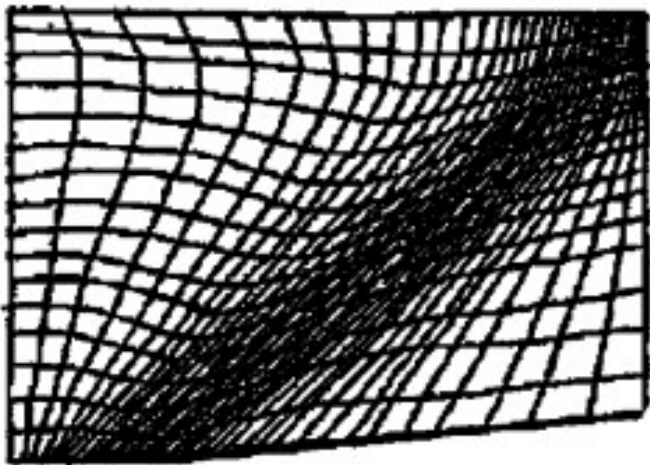
- 1) **Геометрически** адаптивные
- 2) **Динамически** адаптивные

Адаптация сеток

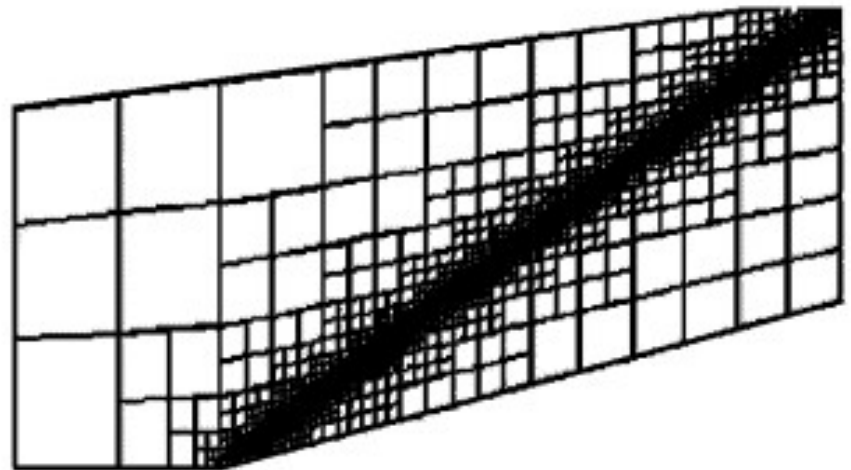
Динамически адаптивные сетки делятся на

- а) Адаптивно-подвижные
- б) Адаптивно-встраиваемые

В первом случае количество узлов сетки остается постоянным, но меняется их взаимное расположение. Во втором случае изменяется число узлов сетки.

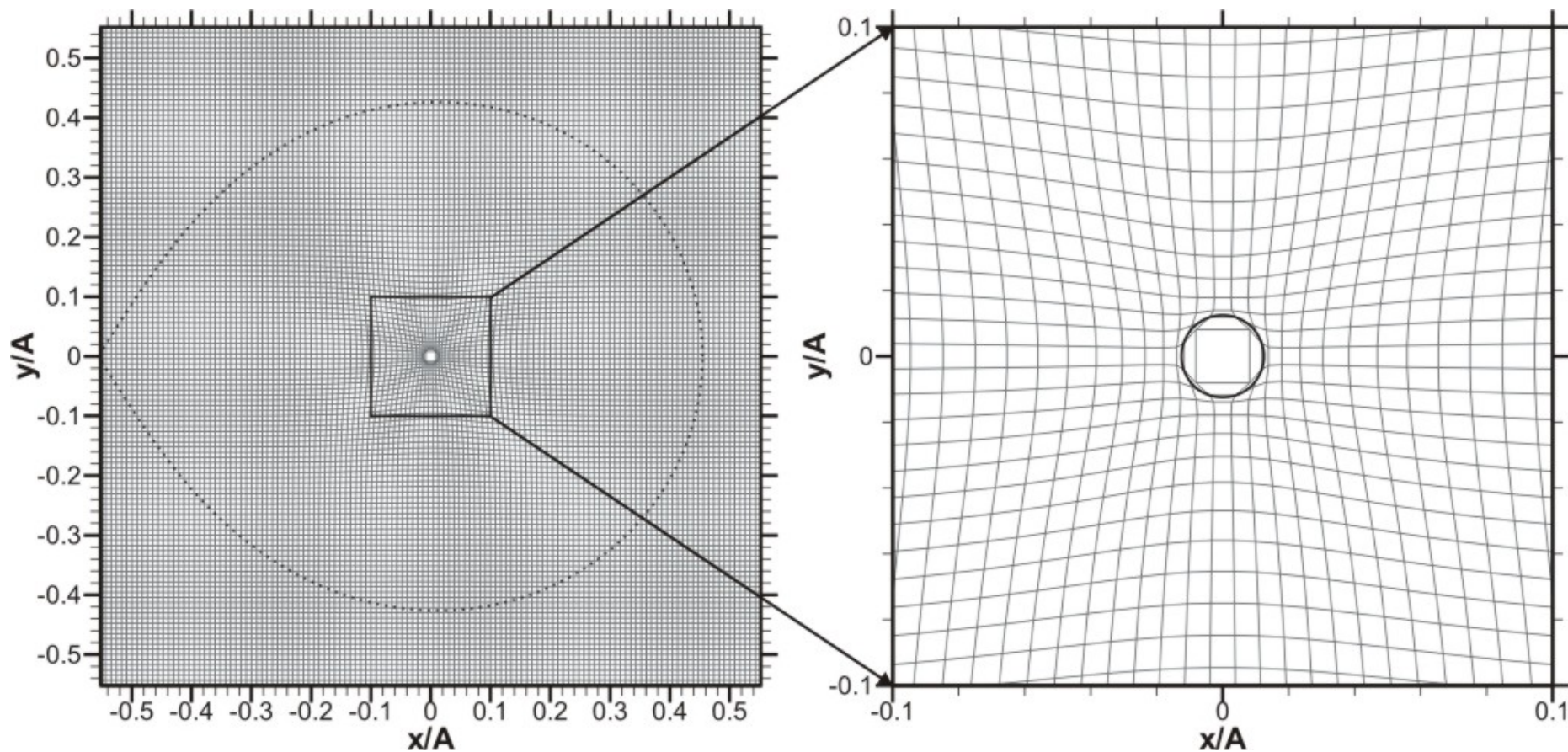


а



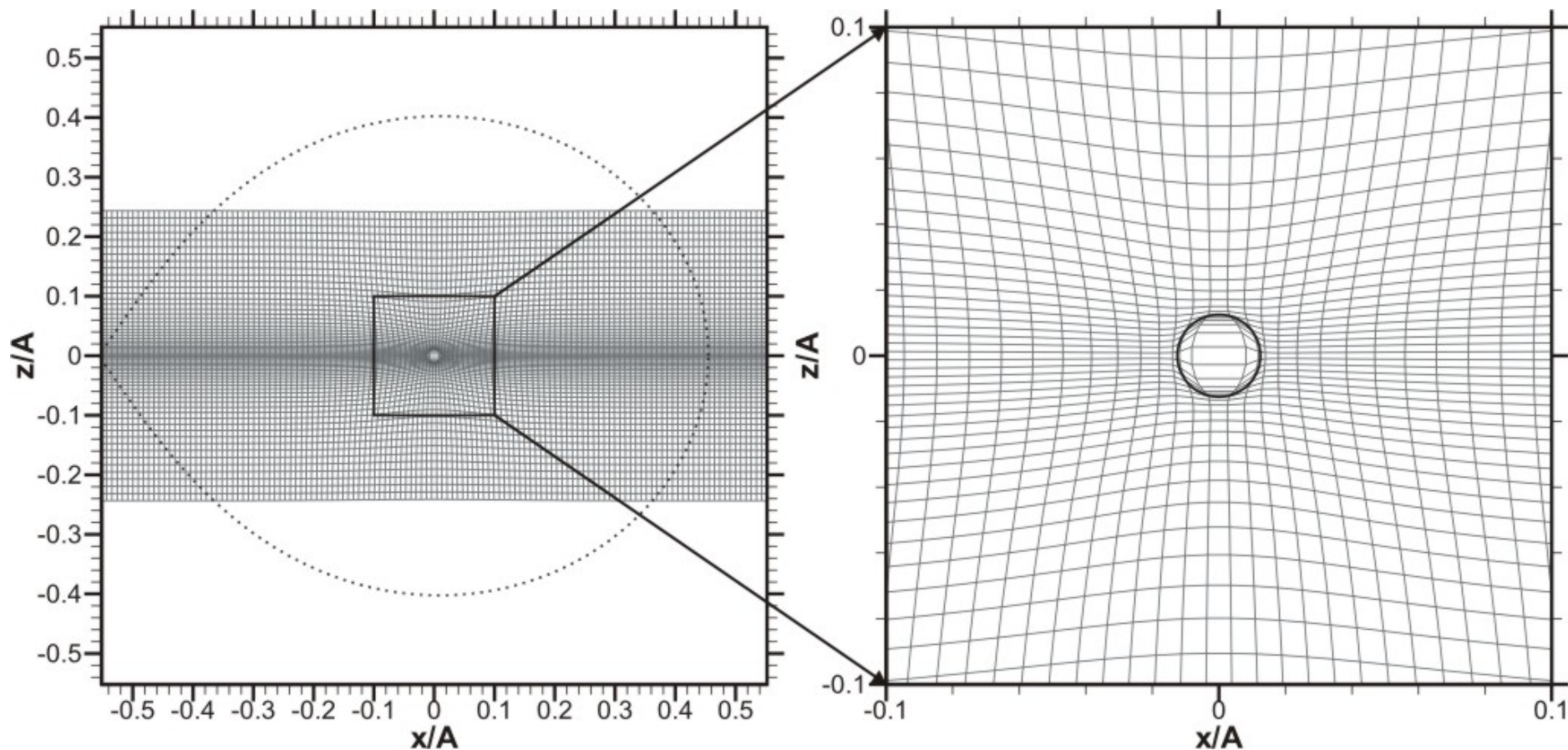
б

Наша сетка



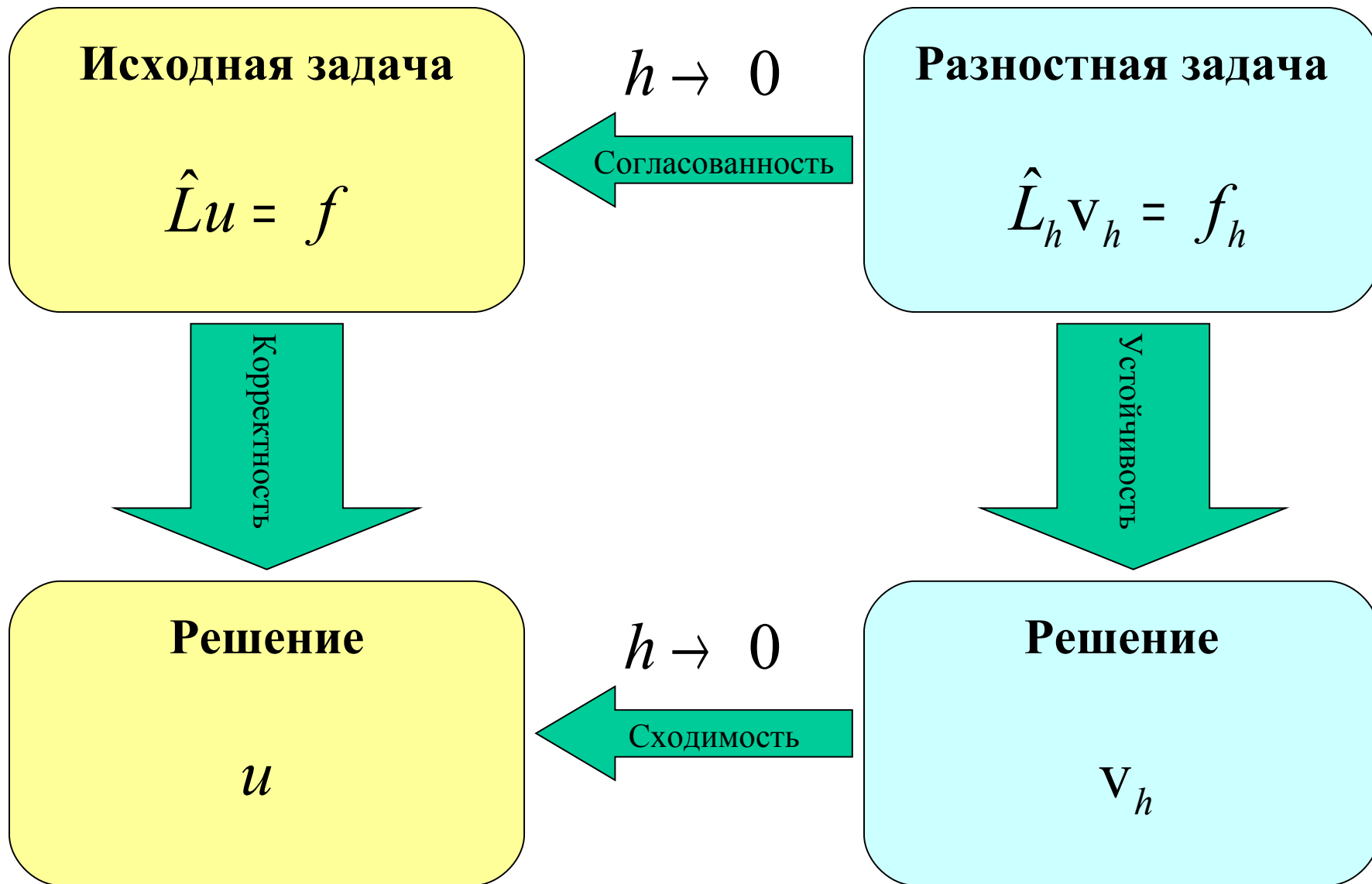
Структура расчетной сетки в экваториальной плоскости (xy) двойной системы.

Наша сетка



Структура расчетной сетки в вертикальной плоскости (xz) двойной системы.

Теорема о сходимости



Анализ устойчивости

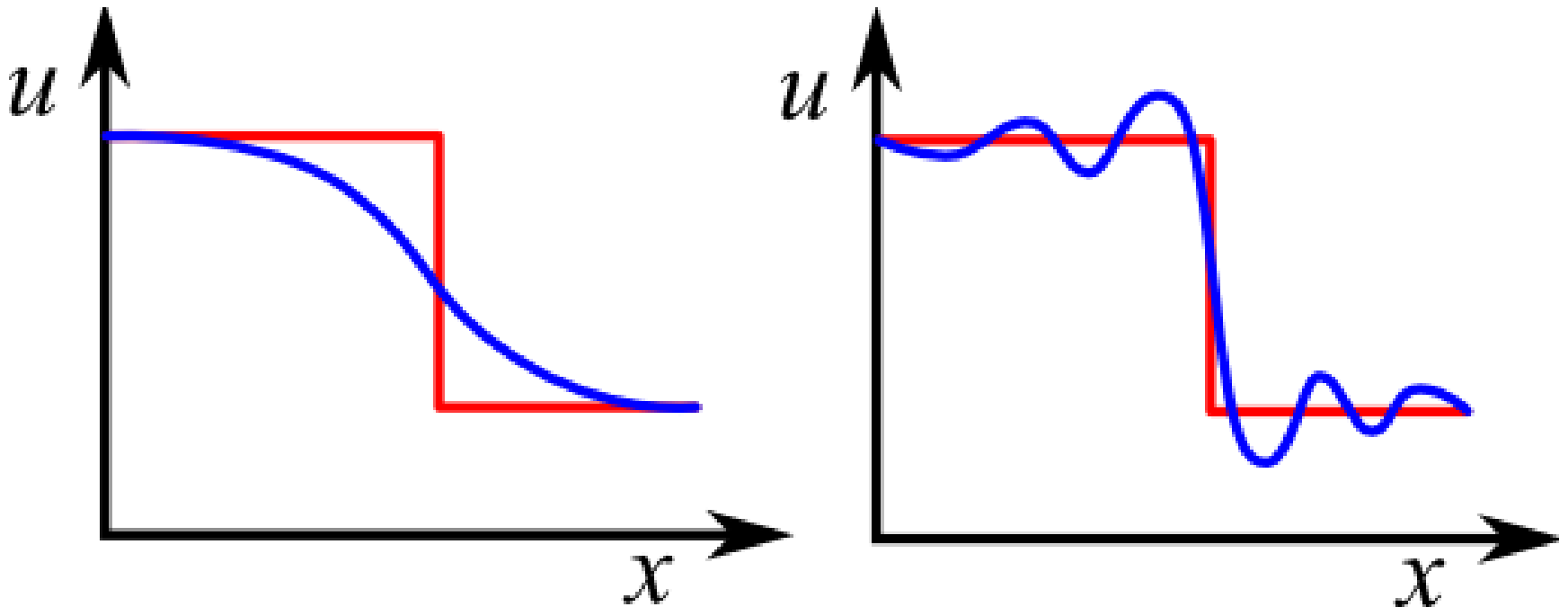
Определение устойчивости формулируется таким образом, чтобы при наличии согласованности получить необходимое и достаточное условие для сходимости. Однако в отличие от согласованности и сходимости, понятие устойчивости не использует информацию об исходной задаче, а является чисто внутренним свойством разностной схемы. Поэтому ей уделяется большое внимание при анализе разностных задач.

Основные методы анализа устойчивости схем.

1. **Метод дискретных возмущений.**
2. **Метод дифференциальных приближений.**
3. **Спектральный метод.**
4. **Энергетический метод.**

Диффузия и дисперсия

Спектральный метод, основанный на дискретном анализе Фурье, позволяет провести классификацию ошибок разностной схемы. Наиболее важные амплитудные и фазовые ошибки связаны с явлением **диффузии** и **дисперсии** на разностной сетке. Диффузия приводит к размытию профилей, а дисперсия — к появлению нефизических осцилляций в численном решении.



Классификация схем

Классификация схем для системы уравнений газовой динамики определяется способом построения обобщенного решения.

1. Обобщенное решение строится как **предел гладких решений** некоторой системы уравнений параболического типа. К этому классу можно отнести схемы с искусственной вязкостью и схему Лакса-Вендроффа.
2. Обобщенное решение строится путем **сшивки гладких решений** на поверхностях разрывов с помощью условий Гюгонио. Наиболее известный такой подход — метод характеристик.
3. Обобщенное решение определяется как решение системы **интегральных** законов сохранения. К этому классу относятся все годуновские методы.

Метод Годунова

В 1959 году С.К. Годунов предложил новый метод для

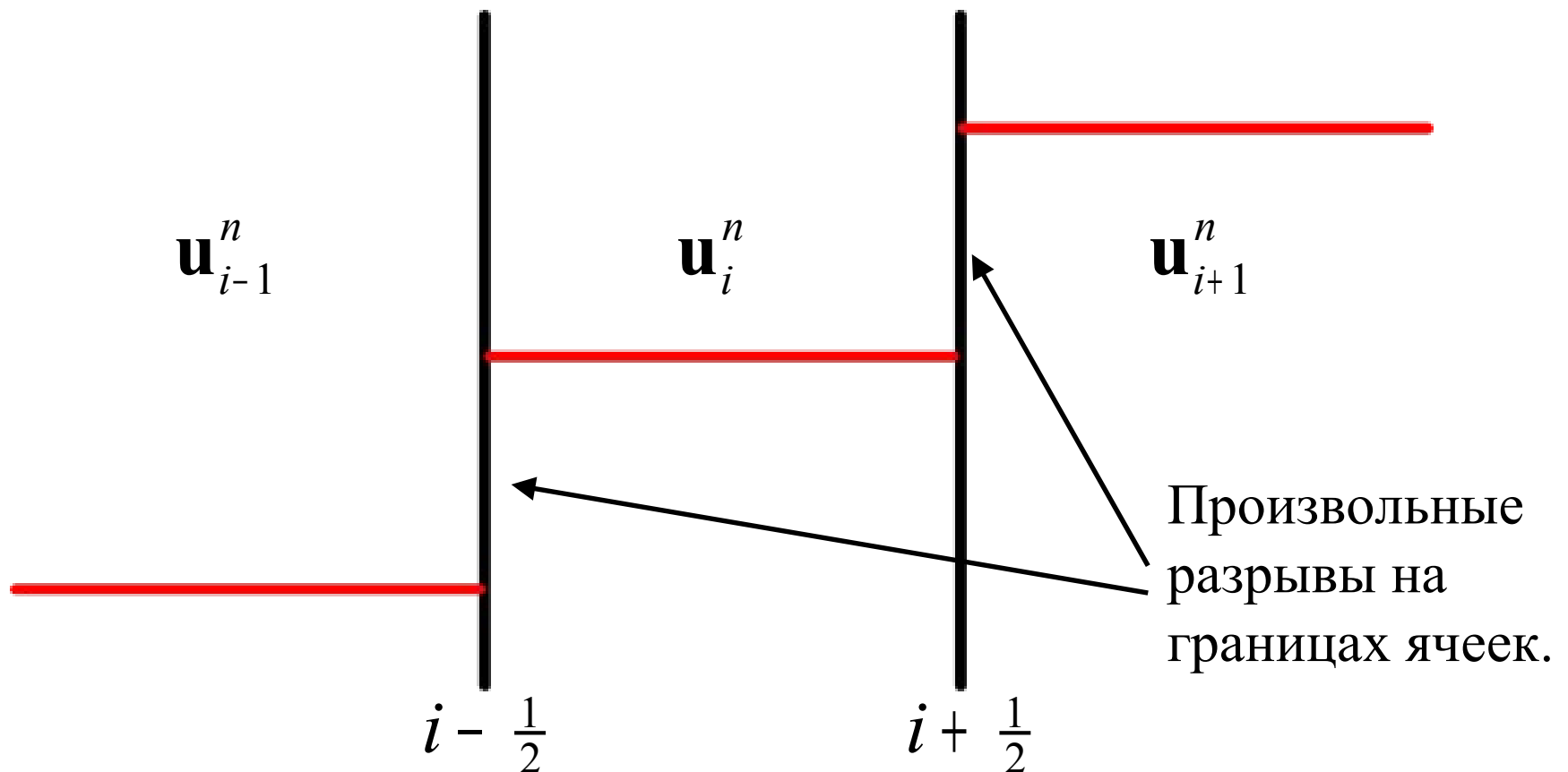
численного решения задач одномерной газовой динамики. В этом методе используется процедура решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Опишем основную идею метода. Рассмотрим базовую схему, полученную с помощью метода конечных объемов:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0.$$

Здесь для удобства ячейки нумеруются целыми индексами, а узлы — полуцелыми. Поскольку мы все равно не знаем распределение функции $\mathbf{u}(x,t)$ внутри ячеек, будем считать эту функцию кусочно-постоянной. Тогда ее значение в ячейке совпадает со средним значением $\mathbf{u}_i$.

Метод Годунова

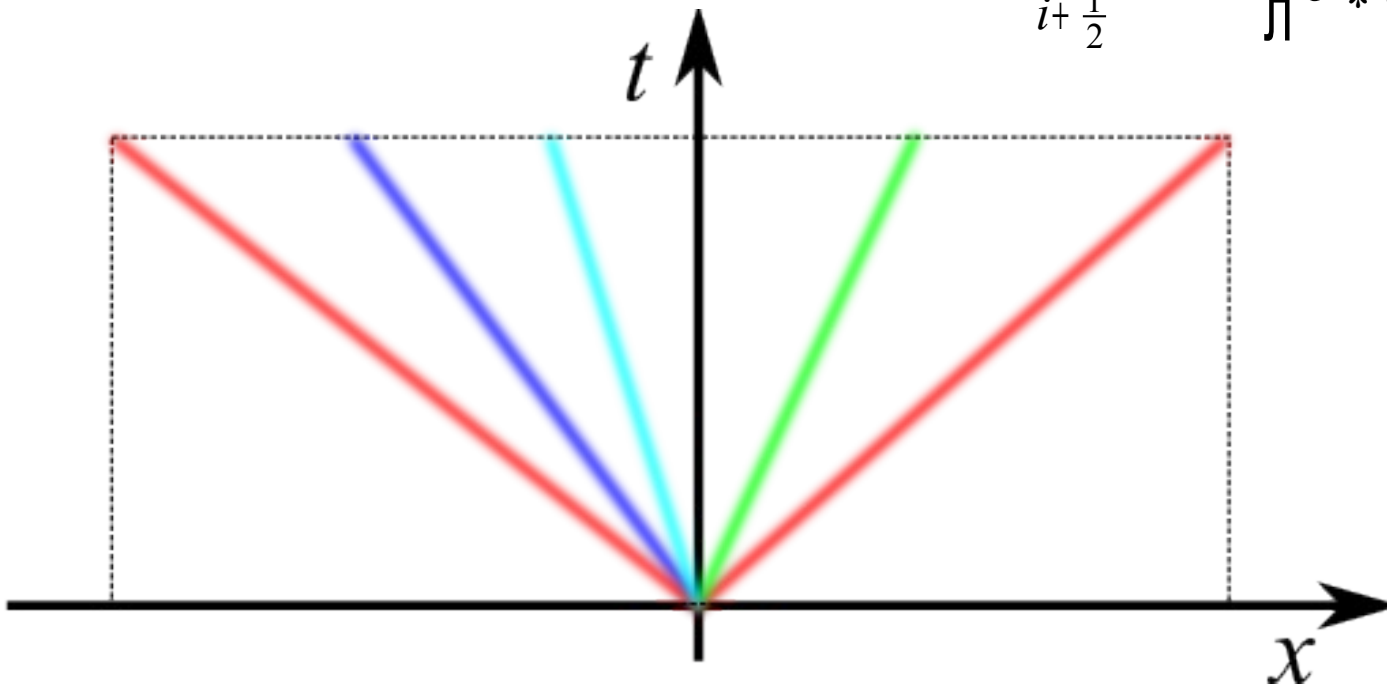
На границах ячеек имеют место произвольные разрывы. Поэтому в следующий момент должен произойти их распад.



Метод Годунова

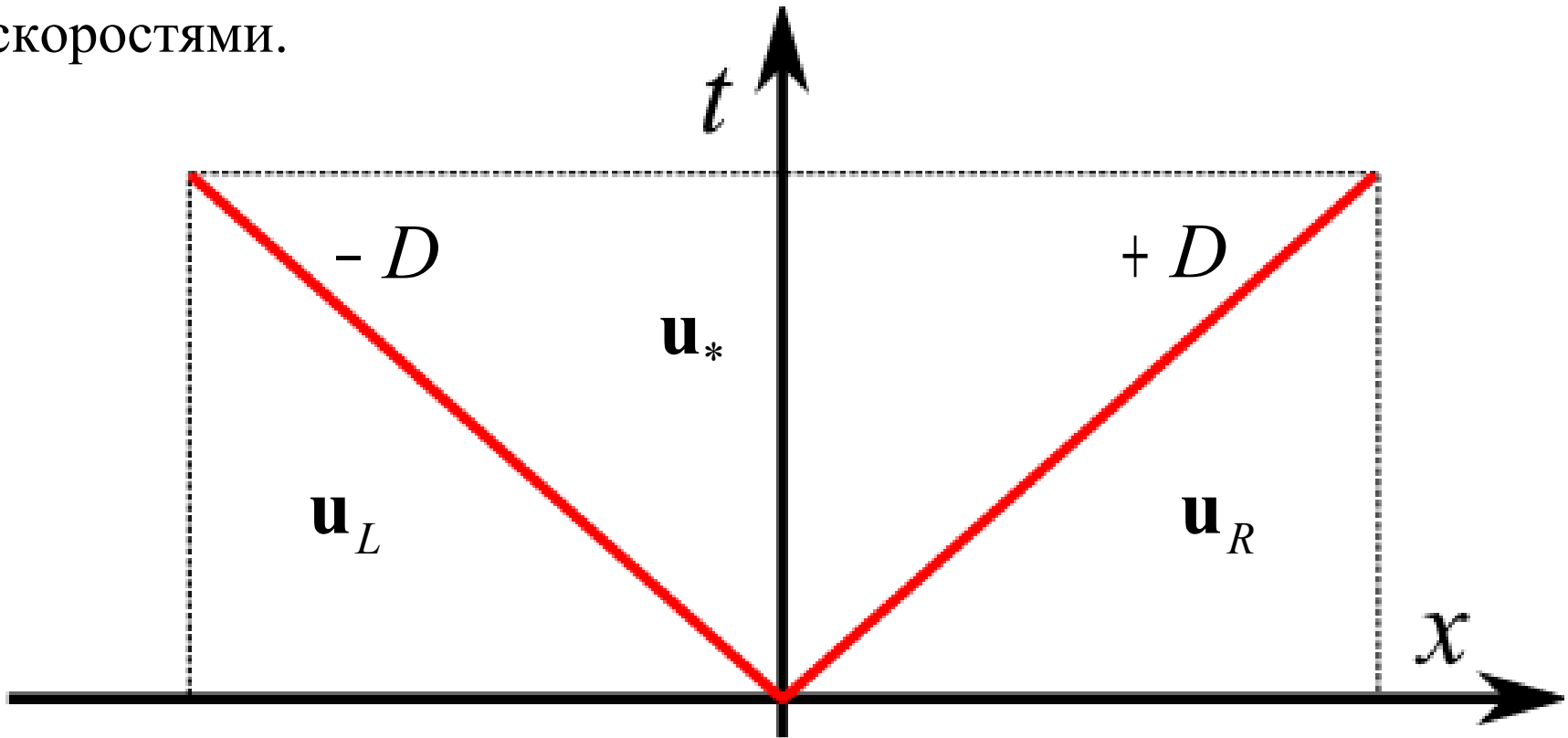
В результате распада разрыва на границе ячейки функция $u(x, t)$ принимает некоторое значение $u_*(x_{i+1/2}, t)$. В силу автомодельности задачи Римана, все бегущие волны являются центрированными. Поэтому величина $u_*(x_{i+1/2}, t)$ не зависит от времени.

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{\Pi} u_* \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n \right) \Big|_{\Pi}.$$



Метод Лакса-Фридрихса

По видимому, самым простым способом приближенного решения задачи Римана для нелинейных уравнений является метод Лакса-Фридрихса (1954). В этом подходе считается, что при распаде разрыва формируются только две ударные волны, распространяющиеся влево и вправо с одинаковыми по модулю скоростями.



Метод Лакса-Фридрихса

Запишем соотношения Гюгонио на левой и правой волнах:

$$- D(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_L) = \mathbf{F}_* - \mathbf{F}_L,$$

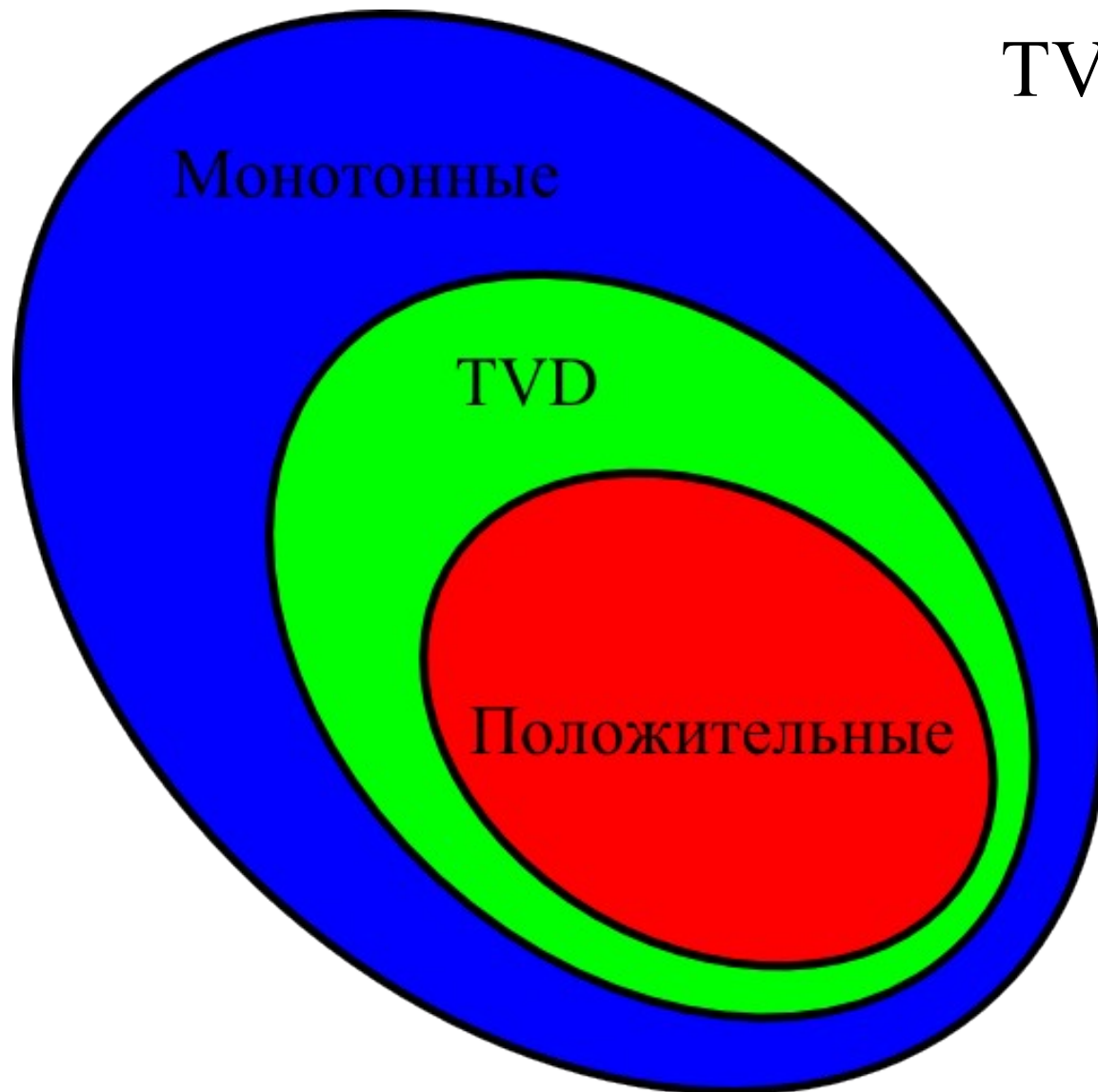
$$+ D(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_*) = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_*.$$

Мы получили два уравнения для двух неизвестных $\mathbf{u}_*$ и $\mathbf{F}_*$.
Решая их, находим:

$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R}{2} - \frac{1}{2D}(\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L),$$

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{D}{2}(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L).$$

Повышающие поправки



$$\text{TV}[u^n] = \sum_i |u_i^n - u_{i-1}^n|.$$

Схема называется **TVD**-схемой (total variation diminishing, схема не увеличивающая полную вариацию решения), если

$$\text{TV}[u^{n+1}] \leq \text{TV}[u^n].$$

Повышающие поправки

Общая идея построение повышающих TVD-поправок заключается в следующем.

- Выбирается монотонная **базовая** схема первого порядка аппроксимации.
- Путем добавки **антидиффузионных** членов базовая схема преобразуется в схему с повышенным порядком аппроксимации.
- Строится определенное правило **ограничения** коэффициентов антидиффузии для обеспечения монотонности.

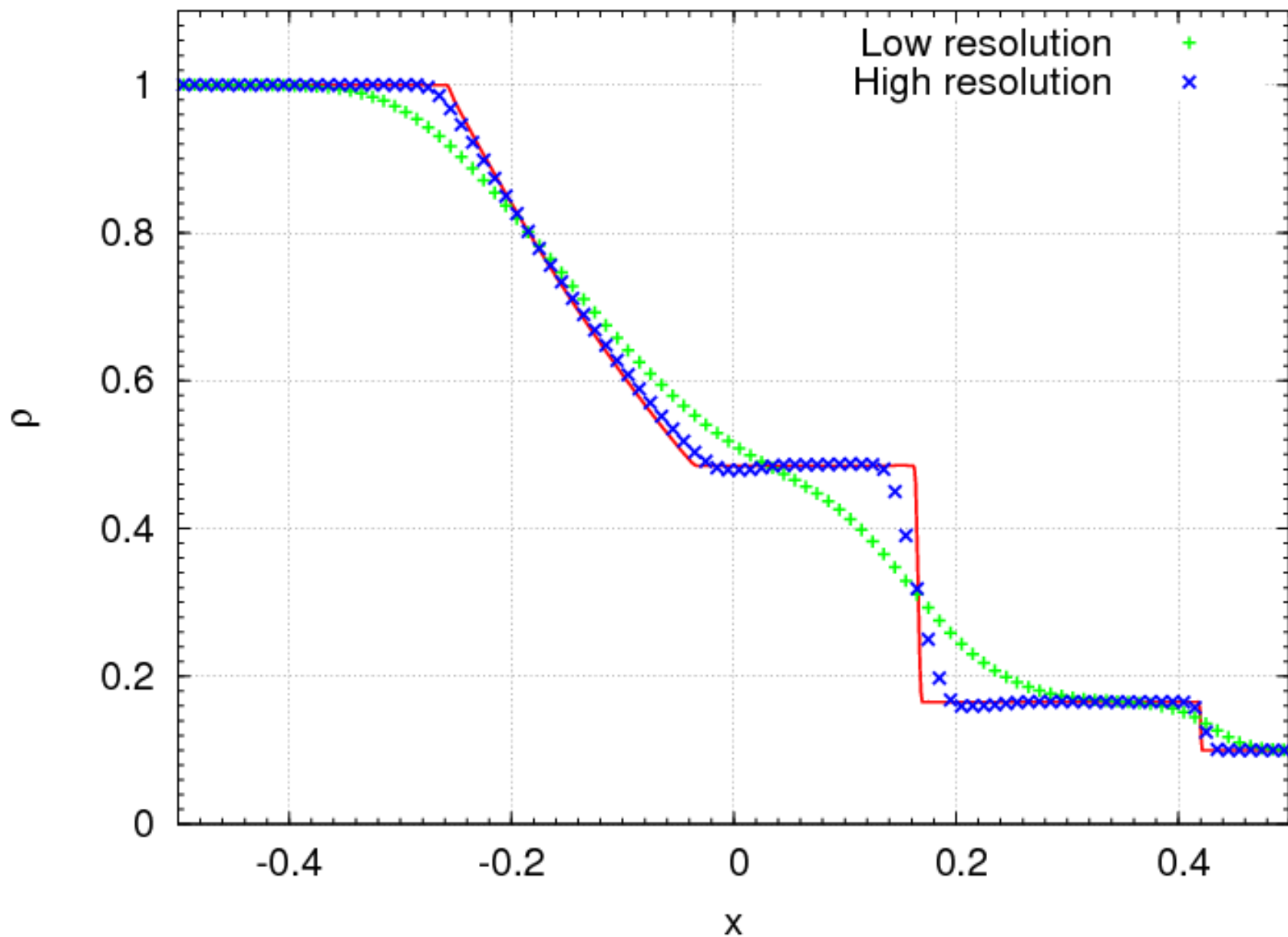
Ограничения потоков производится на основе принципа TVD. Поэтому окончательная схема является TVD-схемой.

Повышающие поправки

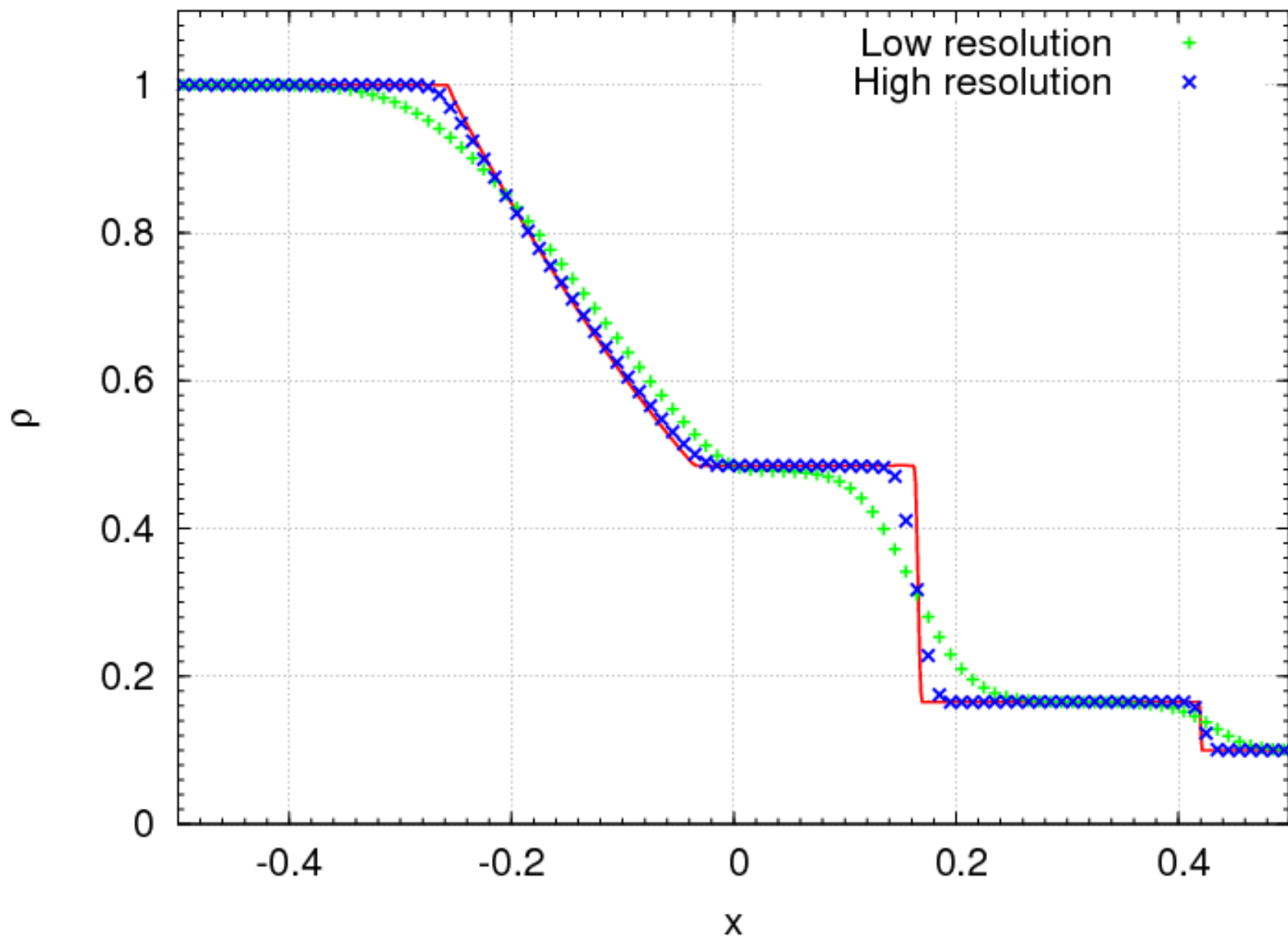
$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}^0 + \delta \mathbf{F}_{i+1/2},$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} = & -\mathbf{e}_{\alpha} \frac{1 - \phi_{\alpha}}{4} \text{minmod}\left(\Delta \mathbf{F}_{i+3/2}^{\alpha-}, \beta_{\alpha} \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^{\alpha-}\right) - \\ & -\mathbf{e}_{\alpha} \frac{1 + \phi_{\alpha}}{4} \text{minmod}\left(\Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^{\alpha-}, \beta_{\alpha} \Delta \mathbf{F}_{i+3/2}^{\alpha-}\right) + \\ & +\mathbf{e}_{\alpha} \frac{1 + \phi_{\alpha}}{4} \text{minmod}\left(\Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^{\alpha+}, \beta_{\alpha} \Delta \mathbf{F}_{i-1/2}^{\alpha+}\right) + \\ & +\mathbf{e}_{\alpha} \frac{1 - \phi_{\alpha}}{4} \text{minmod}\left(\Delta \mathbf{F}_{i-1/2}^{\alpha+}, \beta_{\alpha} \Delta \mathbf{F}_{i+1/2}^{\alpha+}\right). \end{aligned}$$

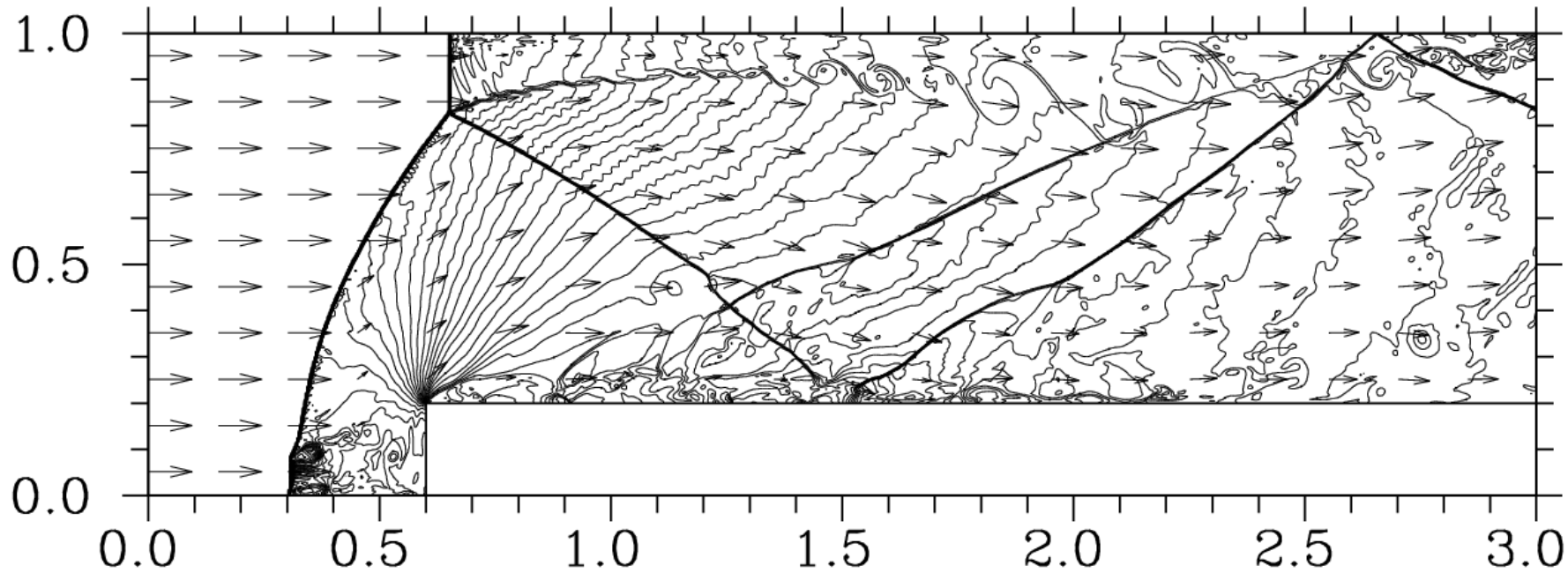
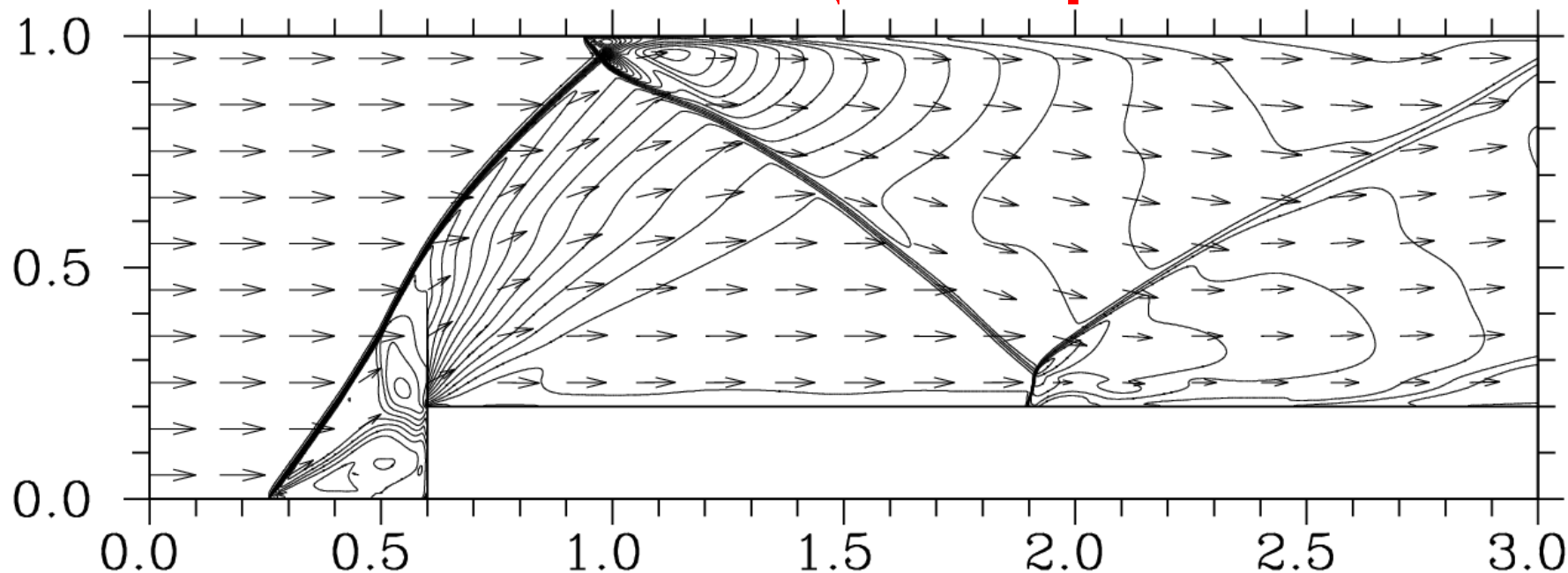
Повышающие поправки



Повышающие поправки



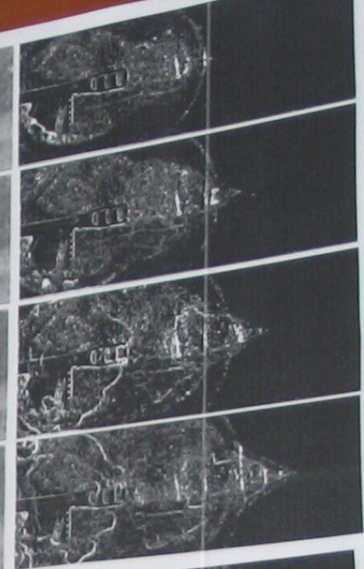
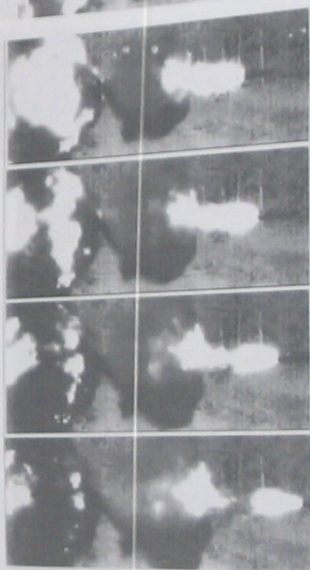
Повышающие поправки



320 × 960

320 × 960

Визуализация
ударных волн.



Визоглизація
угарних волн.

Визуализация расчетов

