Временная переменность как инструмент исследования физических процессов вблизи компактных объектов

М.Ревнивцев

Глава 2

2.1 Статистические свойства спектров мощности

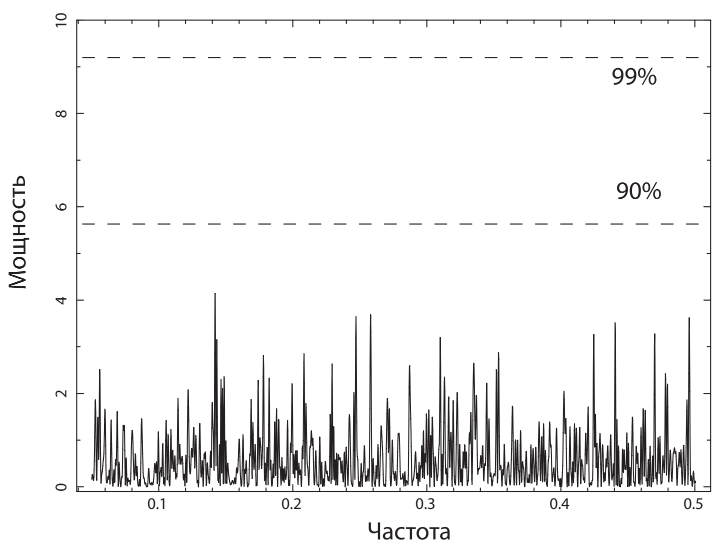


Рис. 2.1: Периодограмма белого шума (в данном случае – Пуассоновского шума счета фотонов). Хорошо видно, что значение периодограммы (единичной оценки мощности) является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Указаны уровни мощности, выше которых можно с достоверностью 90% и 99% сказать, что переменность возникает не за счет Пуассоновского шума счета фотонов.

Представим себе что у нас есть последовательность измерений потока, состоящая из N интервалов/бинов, каждый временной бин шириной t_b.

Дискретное преобразование Фурье этой последовательности можно записать как:

$$a_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi ijk/N} (j = 0, N/2), \quad f = \frac{j}{Nt_b} \tag{2.1}$$

Здесь a_j - фурье-амплитуда сигнала в j-той фурье-гармонике на частоте f, x_k - количество детектируемых фотонов в k-ом временном бине, N - количество измерений в фурье-интервале.

Удобно нормировать мощность переменности P_j как

$$P_j = \frac{2|a_j|^2}{N_\gamma} \tag{2.2}$$

здесь N_{ph}– количество фотонов в одном фурье-интервале. Удобство этой нормировки заключается в том, что значение мощности нормируется на ожидаемое значение дисперсии полного количества отсчетов в исследуемом интервале, т.е. учитывает информацию о статистических свойствах сигнала.

Можно показать, что для идеального пуассоновского процесса , т.е. считая наш детектор идеальным, случайная величина P_j, полученная после преобразования Фурье одного сегмента (фурье-интервала) кривой блеска, подчиняется в пределе $N_\gamma \gg 1$ распределению χ^2 с двумя степенями свободы (χ^2_2) независимо от фурье-частоты j, $j = 1, 2, ..., N/2 - 1$ (для $j = N/2$ распределение получается χ^2_1).

Легко показать, что независимость математического ожидания значения мощности переменности от частоты выполняется не только для пуассоновского процесса, а для любой функции, составленной из реализаций случайной величины. Распишем значение мощности:

$$a_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{2\pi ijk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[\cos(2\pi jk/N) + i\sin(2\pi jk/N)\right] = A_j + iB_j$$

Для стационарного процесса $\langle A_j \rangle = \langle B_j \rangle = 0$. Согласно центральной предельной теореме величины A_j и B_j имеют нормальное (Гауссово) распределение, поскольку являются суммами большого количества значений реализаций случайных величин, выбраных из одного распределения.

Очевидно, что среднее значение мощности на всех частотах должно быть одинаково. Используем это свойство, чтобы получить это среднее значение.

Запишем дисперсию наблюдаемых измерений и используем теорему Парсеваля:

$$N \cdot Var(x_k) = \sum_k (x_k - \langle x \rangle)^2 = \sum_k x_k^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_k x_k\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} |a_j|^2 - \frac{1}{N}a_0^2 \tag{2.3}$$

$$N \cdot Var(x_k) = \frac{1}{N}\sum_{j\neq 0} |a_j|^2 = \langle |a_j|^2 \rangle \tag{2.4}$$

Для Пуассоновского процесса $Var(x_k) = \langle x \rangle$, следовательно:

$$N\langle x \rangle = N_\gamma = \langle |a_j|^2 \rangle \tag{2.5}$$

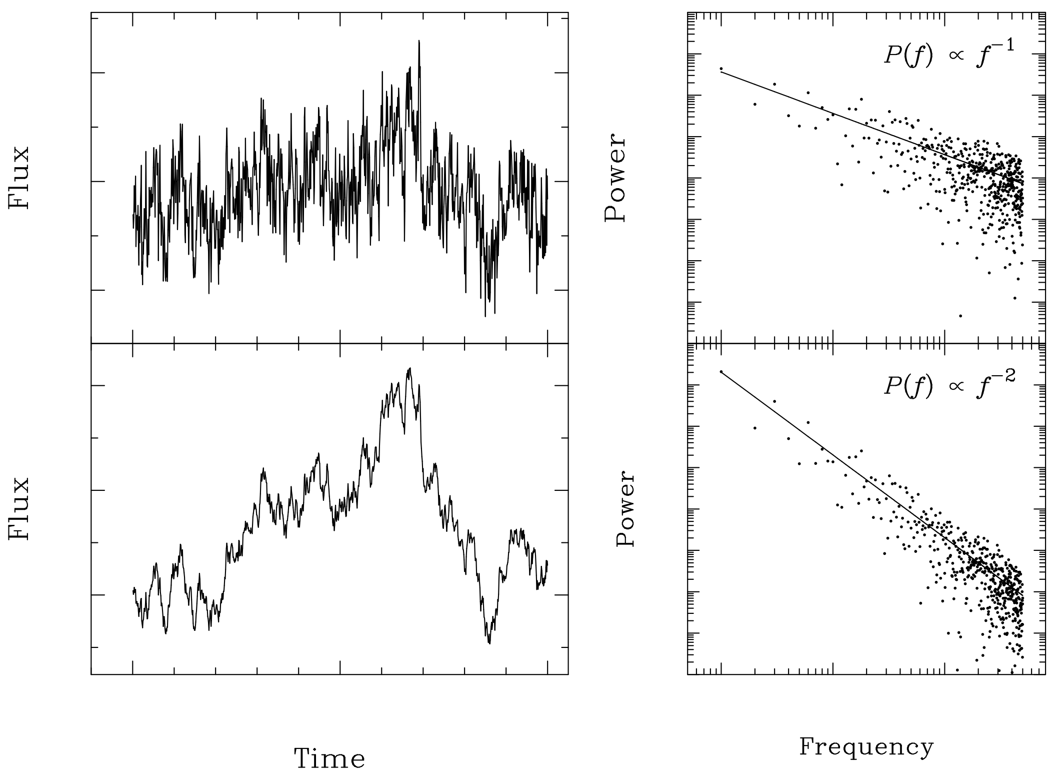


Рис. 2.2: Примеры стохастического шума в кривых блеска и их периодограммы (Vaughan et al., 2003). Истинные спектры мощности кривых показаны прямыми. Видно, что несмотря на отсутствие "шума измерений" в данных кривых блеска значения периодограмм в индивидуальных частотных интервалах демонстрируют значительный разброс относительного истинного значения мощности переменности на этих частотах. Причиной этого является стохастическая природа широкополосного шума.

Таким образом, для нашего Пуассоновского процесса в нормировке (2.2) величина мощности $P_j = 2N_\gamma^{-1}|a_j|^2$ является случайной величиной с распределением χ_2^2 (по определению - распределение Пирсона χ_n^2 распределение суммы квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин). Стоит отметить, что это только для частот $j = 1, ..., N/2 - 1$, на частоте $j = N/2$ распределение другое (как χ_1^2).

$$\mathcal{P}(P_j) = \chi_2^2\,,\ \langle P_j \rangle = 2\,,\ \sigma_{P_j} = 4 \tag{2.6}$$

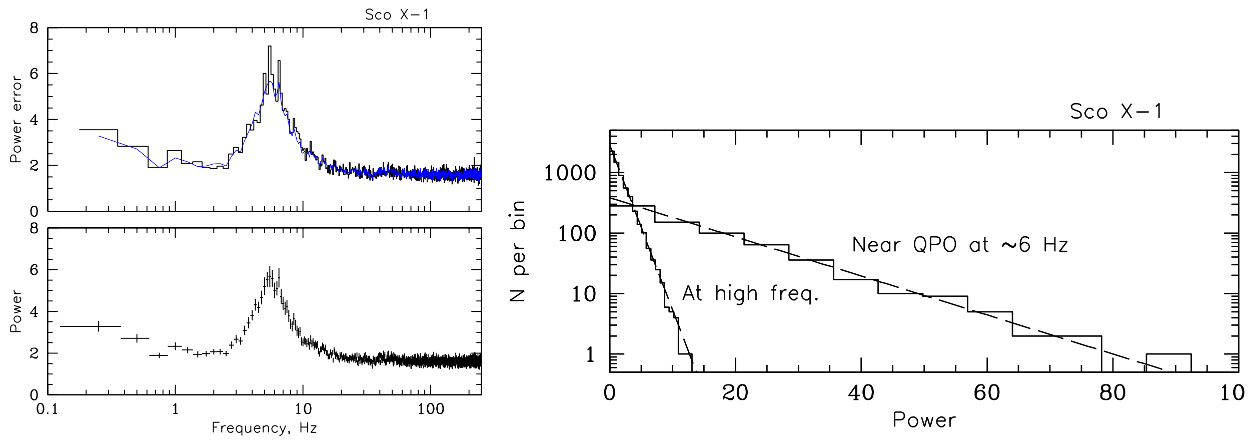


Рис. 2.3: Спектр мощности в одном из наблюдений обсерватории RXTE ярчайшей нейтронной звезды на рентгеновском небе Скорпион X-1. Нижняя панель на верхнем рисунке показывает спектр мощности, полученный усреднением периодограмм, посчитанных из 200 отрезков кривой блеска, верхняя показывает измеренное значение квадратного корня из дисперсии значений периодограмм в индивидуальных измерениях. Тонкая синяя кривая показывает предказание дисперсии из значения мощности переменности согласно формуле (2.7). На нижнем рисунке показаны распределения значений периодограмм на двух разных частотах, а) там где преобладает вклад квазипериодической осцилляции (около 6 Гц) и б) там, где преобладает шум Пуассоновского счета фотонов. Видно, что в обоих случаях распределение значений периодиграмм экспоненциальное (т.е. подчиняющееся распределению χ^2_2), но на частоте КПО амплитуда вариации значения периодограмы выше.

Распределение χ^2_2 имеет простой экспоненциальный вид $p(x)dx = \exp(-x/2)/2dx$ (см. рис.2.1). Вероятность значения мощности превысить данное значение x: $P(>x) = \exp(-x/2)$.

Если детектируемый сигнал содержит дополнительную переменность амплитудой $P(f)$, создаваемую самим наблюдаемым источником, то получаемое распределение значений мощности в единичном эксперименте существенным образом зависит от того какого типа это переменность.

Если переменность является *стохастической*, то распределение значения мощности, измеренного в индивидуальном частотном интервале, так же является распределением χ^2_2, модифицированным с учетом математического ожидания значения мощности на этой частоте P_j.

$$\mathcal{P}(p_j|P_j) = P_j\frac{\chi^2_2}{2} = \frac{1}{P_j}\exp(-p_j/P_j)\ ,\ \ \sigma_{P_j} = P_j \tag{2.7}$$

Здесь P_j истинное значение мощности на данной частоте, p_j – значение периодограммы (единичной оценки мощности) на данной частоте (см. рис. 2.3).

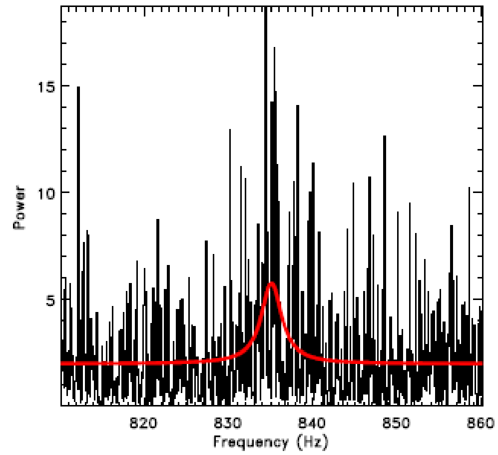


Рис. 2.4: Пример аппроксимации моделью периодограммы содержащей квазипериодические осцилляции. аппроксимация проводилась методом максимального правдоподобия (Barret & Vaughan, 2012)

Необходимо отметить, что оценка мощности по периодограмме, посчитанной в единичных частотных интервалах *не является состоятельной* оценкой мощности. При увеличении количества исходных измерений дисперсия оценки мощности, проведенной без дополнительного усреднения (например по частоте), не уменьшается. Для получения *состоятельной оценки* необходимо проводить усреднение значений мощности в m индивидуальных частотных интервалах или m индивидуальных отрезков/частей оригинальной кривой блеска. В таком случае распределение получаемого значения будет иметь вид:

$$\mathcal{P}(P_{j,m}) = \frac{P_{j,m}\chi^2_{2m}}{2m} \tag{2.8}$$

При увеличении числа m относительная дисперсия оценки мощности будет стремиться к нулю.

При влиянии Пуассоновского шума счета фотонов распределение получающихся значений на периодограммах и их дисперсия примет вид:

$$\mathcal{P}(P_j) = \chi^2_2(1 + \frac{P_j}{2}) \ , \ \ \sigma_{P_j} = 2 + P_j \tag{2.9}$$

После усреднения по m периодограммам:

$$\mathcal{P}(P_j) = \frac{\chi^2_2}{m}(1 + \frac{P_j}{2}) \ , \ \ \sigma_{P_j} = \frac{2 + P_j}{m} \tag{2.10}$$

Важно отметить, что уже эти формулы показывают, что строго говоря, *при аппроксимации измеренных спектров мощности моделями нельзя использовать метод минимизации* χ^2, поскольку ошибка измерения мощности (σ_{P_j}) зависит от самого значения мощности P_j. Более того, распределение значения мощности при незначительном усреднении является существенно несимметричным (в пределе одиничного измерения распределение является экспоненциальным, т.е. экстремально несимметричным), что также может привести к существенно смещенным оценкам параметров модели.

Наиболее надежный способ аппроксимации спектров мощности моделями – использовать метод максимального правдоподобия (Vikhlinin et al., 1994), причем можно это делать в пространстве оригинальных периодиограмм, т.е. до усреднения значений периодограмм по частоте или по отдельным интервалам оригинальной кривой блеска (Barret & Vaughan, 2012).

Приведем пример, как записать функцию правдоподобия для этого случая.

Плотность вероятности при модельном значении мощности S_j иметь значение периодограммы (измеренное значение мощности) I_j равна:

$$p(I_j|S_j) = \frac{1}{S_j}\exp(-I_j/S_j) \tag{2.11}$$

Функция правдоподобия

$$\mathfrak{L} = -2\ln\prod p(I_j|S_j) = 2\sum\left(\frac{I_j}{S_j} + \ln S_j\right) \tag{2.12}$$

Пример такой аппроксимации при помощи метода максимального правдоподобия показан на рис.2.4

Если переменность на определенных частотах является *когеррентной*, т.е. может быть детерминистическим образом предсказана внутри рассматриваемого отрезка времени, то распределение значения мощности на этих частотах уже не будет являться случайной величиной с распределением χ^2_2 (см. рис. 2.5).

2.2 Методы поиска периодического сигнала

Важнейшей задачей при анализе временных рядов является задача поиска периодического сигнала в исходных данных. Для этого используются различные методы, имеющие свои плюсы и минусы.

Метод наложения эпох является одним из самых распространненых методов поиска периодических сигналов в различных данных. Суть метода заключается в сравнении фазового профиля кривой, сложенной с набором пробных периодов, с константой. Если в исходном сигнале есть периодическая составляющая, то фазовая кривая, полученная усреднением всех значений исходной кривой, разложенных по соответствующим фазовым интервалам, будет иметь явные отличия от константы. При отсутствии периодического сигнала любые стохастические вариации исходной кривой блеска в фазовой кривой усреднятся и фазовая кривая будет стремится к константе. Основными преимуществами метода является возможность учета долговременного сдвига периода пульсаций, легкого учета пропусков в данных наблюдений, часто случающихся в наземных и космических экспериментах.

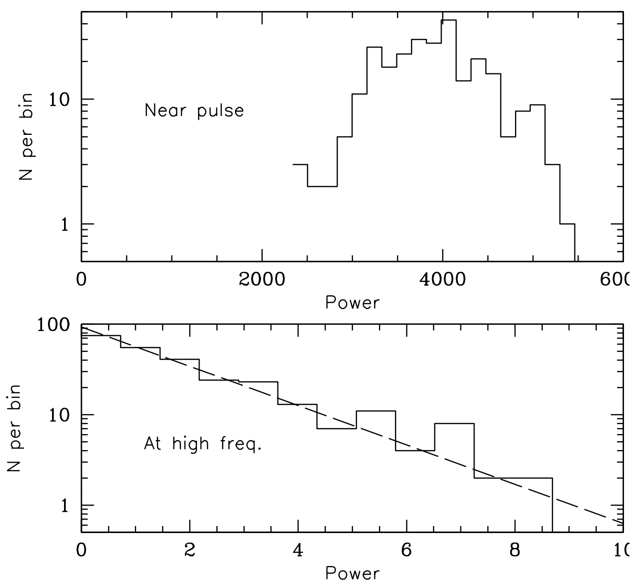


Рис. 2.5: Распределение значений периодограмм в единичных интервалах на частотах, где преобладает Пуассоновский шум счета фотонов (внизу), и там, где основной вклад в переменность дает пульсация рентгеновского потока из-за вращения нейтронной звезды (система Геркулес X-1). Хорошо видно, что значение периодограммы на частоте когеррентного сигнала не подчиняется распределению χ^2_2 (сравни с рис. 2.3).

Статистика, обычно использующаяся для проверки гипотезы о том, совместима ли получающаяся фазовая кривая с константой:

$$S = \sum_{j-1}^{n} \frac{R_j - \langle R \rangle}{\sigma_j^2} \tag{2.13}$$

здесь $\langle R \rangle = N_\gamma / T'$, $\sigma_j^2 = R/T_j$, T_j– время суммарное время наблюдений, использованных в j фазовом бине (всего n фазовых бинов), N_γ– полное количество фотонов в исходной кривой блеска.

Для случайного процесса величина S имеет распределение χ^2_{n-1}. Следовательно, при превышении величиной S определенного предела предела S_l, вычисляемого по известному распределению χ^2_{n-1}, можно говорить о наличии в исходном сигнале периодической составляющей с вероятностью

$$P = 1 - \int_0^{S_l} \chi^2_{n-1}(x) dx$$

Метод наложения эпох имеет преимущество, что для его работы совершенно неважен

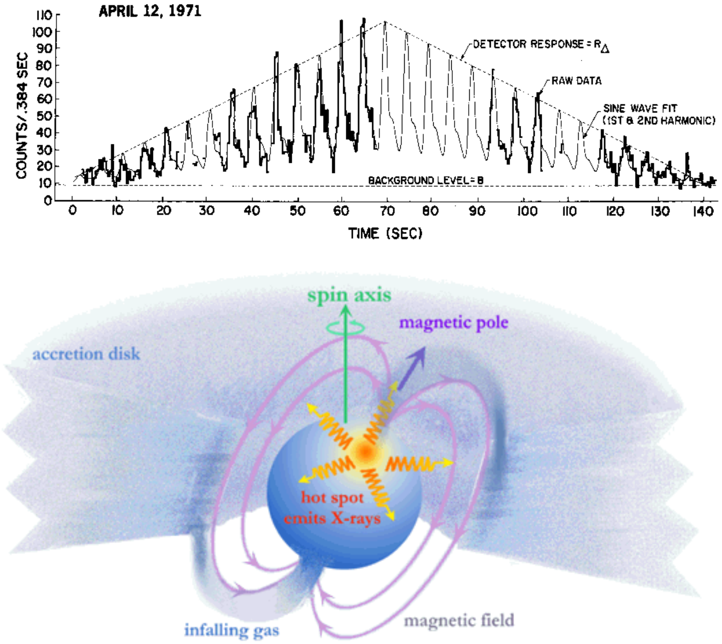


Рис. 2.6: Вверху – Одно из первых обнаружений периодического сигнала в рентгеновском потоке от нейтронной звезды. Яркость рентгеновского объекта Центавр X-3 по данным наблюдений рентгеновской обсерватории UHURU (1970-1973). Хорошо видна периодическая структура в регистрируемом сигнале (Giacconi et al., 1971). Внизу – схематичное изображение того, как вещество аккреционного диска вокруг нейтронной звезды канализируется ее магнитосферой на магнитные полюса. Вращающиеся (со звездой) полярные шапки затем создают для удаленного наблюдателя 'эффект маяка'

вид фазовой кривой, она может произвольно сильно отличаться от простой синусоиды. Это важно для большинства радио и гамма пульсаров, фазовая кривая которых имеет острые пики.

Метод статистики Z_n^2 похож на метод наложения эпох тем, что анализ начальных данных проводится в фазовом пространстве, т.е. после того, как все измеренные величины будут распределены по фазам предполагаемых пульсаций. Однако в данном случае проверяется не соответствие фазовой кривой константе, а фазовая кривая раскладывается на периодические функции и амплитуда суммы некоторого (наперед заданного) количества гармоник (n) сравнивается с распределением амплитуд, ожидаемых в случайном эксперименте.

Такой метод имеет существенно большую чувствительность, чем простой поиск пиков на периодограммах (спектрах мощности) из-за дополнительного учета кратных гармоник (пик на периодограмме чувствителен только к основной гармонике пульсирующего сигнала), а также несколько большую чувствительность, чем метод наложения эпох.

Для проверки гипотезы о наличии периодического сигнала на частоте f в данных используется статистика:

$$Z_n^2(f) = \frac{2}{N_\gamma} \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{N_\gamma} \cos(k\phi_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{N_\gamma} \sin(k\phi_j) \right]^2 \tag{2.14}$$

Здесь ϕ_j - фазовое положение j фотона, зарегистрированного в момент t_j, расчитанное для данной тестовой частоты периодического сигнала f.

Величина Z_n^2 имеет распределение χ^2_{2n}, n – максимальная кратность гармоник, до которой суммируется Z^2 статистика.

Для случайного сигнала, нее имеющего внутри себя вклада периодической компоненты, величина Z_l^2 распределена как χ^2_{2n}.

2.3 Периодические вариации яркости и параметры компактных объектов

2.3.1 Определение орбитальных параметров двойных систем. Массы объектов

Яркие релятивистские объекты в нашей Галактике как правило находятся в двойных системах с обычными (нерелятивистскими) звездами. Для релятивистских объектов-рентгеновских источников это практически впервые надежно было показано при помощи анализа периодического сигнала от источника Центавр Х-3. Рентгеновских источник Центавр Х-3 представляет собой двойную систему с нейтронной звездой, вращающейся вокруг своей оси с периодом 4.8 секунды. Долговременные наблюдения этого источника с борта первой специализированной рентгеновской обсерватории UHURU показали, что этот период нестабилен, а изменяется периодическим образом с периодом около 2.1 дня. Было показано, что наблюдаемые изменения периода пульсаций возникают из-за движения пульсирующего тела по орбите в двойной системе.

Рассмотрим простейший (без учета эффектов общей теории относительности, которые важны лишь для очень тесных двойных систем, таких как пульсар Халса-Тейлора и т.п.) вариант таких вариаций.

Необходимо отметить, что все дальнейшие рассуждения можно применять только для данных, время регистрации события в которых поправлено на движение Земли (и спутника) вокруг Солнца, т.е. времена прихода фотонов должны быть пересчитаны в систему отсчета связанную с барицентром Солнечной системы.

Время прихода пульса от удаленного объекта можно записать как функцию, зависящую от долговременной эволюции периода объекта, а также с положением этого объекта на разных фазах его орбиты. Действительно, при движении по орбите сигнал пульса должен проходит разные расстояния в зависимости от того, на какой фазе орбиты он находится. Для того, чтобы учесть эти эффекты используется так называемый метод *"времен прихода пульсов" (pulse arrival time)*. Для каждого пульса порядкового номера n записывается ожидаемое время его прихода с учетом как долговременной (второй член в правой части выражения) так и орбитальной (третий член в правой части выражения) эволюции системы:

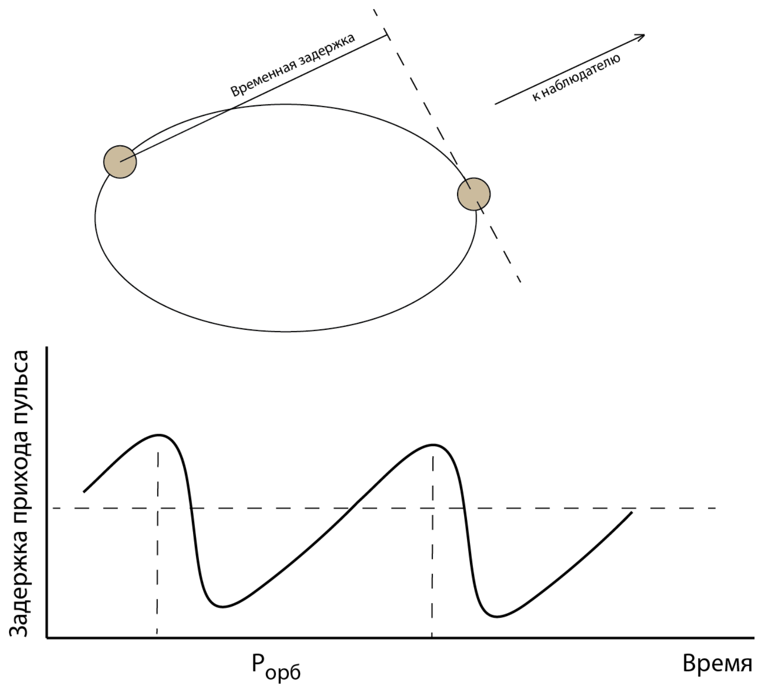


Рис. 2.7: Иллюстрация эффекта задержки прихода пульса от "постоянных часов двигающихся по замкнутой орбите в двойной системе.

$$t_n = T_0 + \sum P_n + \frac{a_x \sin i}{c} F(e, \omega, \tau, \theta) \tag{2.15}$$

- T_0– время начала отсчета, $a_x \sin i$ – проекция полуоси эллипса движения компактного объекта на плоскость перпендикулярную лучу зрения, i – угол наклона плоскости двойной системы к лучу зрения наблюдателя, e - экцентриситет орбиты, ω – долгота периастра, τ - время прохода периастра, $\theta = 2\pi(t-\tau)/P_{\rm orb}$ - аномалия.

Долговременная эволюция периода представляется как разложение в ряд Тэйлора:

$$\sum P_n = P_0 n + \frac{1}{2}\dot{P} P_0 n^2 + \frac{1}{6}\ddot{P} P_0 n^3 + \ldots \tag{2.16}$$

Орбитальная задержка записывается как:

$$F(e, \omega, \tau, \theta) = (1-e^2)\frac{\sin(\nu+\omega)}{1+e\cos\nu} \tag{2.17}$$

здесь ν – истинная аномалия, которая может быть вычислена из аномалии θ следующим образом

$$\tan\frac{\nu}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\tan\frac{E}{2}, \quad E - e\sin E = \theta \tag{2.18}$$

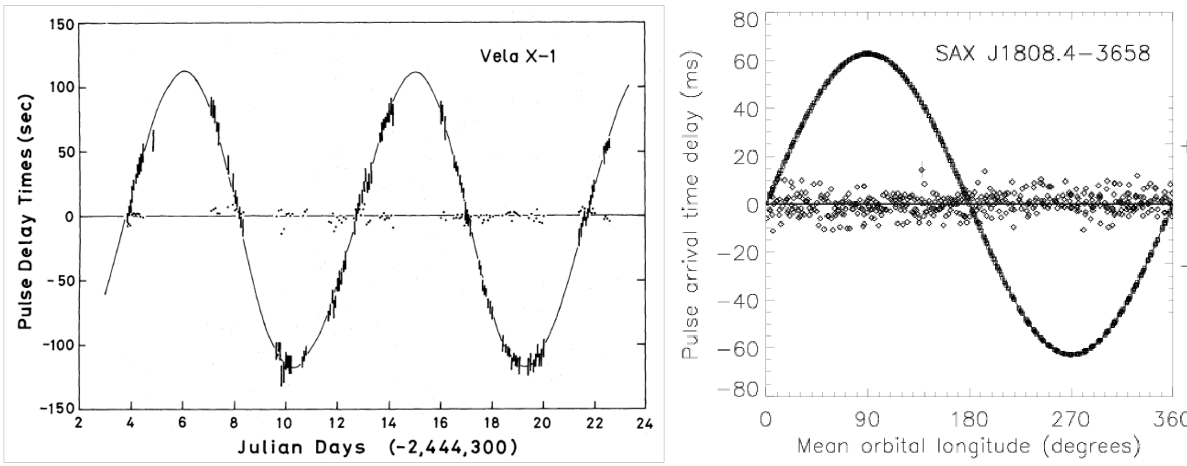


Рис. 2.8:

Данные наблюдений, переведенные во время регистрации прихода пульса, аппроксимируются формулой (2.15).

Примеры задержки прихода пульса от аккрецируюших рентгеновских пульсаров приведены на рис.2.8.

Непосредственно из этих измерений можно сразу посчитать так называемую функцию масс двойной сиетемы:

$$f(M_1, M_2) = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(a_x \sin i)^3}{P_{\rm orb}^2} = \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1+M_2)^2} \tag{2.19}$$

Откуда, предположив (или измерив из других наблюдений) массу одного компаньона и наклонение орбиты двойной системы можно измерить массу другого компаньона. Именно таким образом в настоящее время получаются самые надежные оценки масс компактных объектов, в том числе черных дыр. В частности, масса одного из наиболее надежных кандидатов в черные дыры - компактного объекта в системе Лебедь X-1 – $M_{rmx} = (14.8 \pm 1.0)M_\odot$ – измерена именно таким способом. Только в случае Лебедь X-1 измеряется не орбитальное движение компактного объекта по изменениям в периоде пульсаций объекта, а орбитальное движение звезды-компаньона по Допплеровским сдвигам положения линий в спектре излучения звезды.

2.3.2 Орбитальные модуляции яркости. Массы объектов, размер аккреционного диска.

Одной из наиболее доступных наблюдениям периодичностей является модуляция яркости двойных систем за счет орбитального движения. В случае достаточно большого угла наклонения орбиты к лучу зрения звезда-компаньон компактного объекта может затмевать как сам компактный объект, так и другие излучающие области вокруг него. Рассмотрим - какую информацию о параметрам компактного объекта и вещества вокруг него мы можем получить из таких наблюдений.

Прежде всего обрисуем общую картину излучающих областей в двойной системе (см. Frank et al. 2002).

Тесная двойная система (а именно такие мы рассматруваем здесь, именно в таких системах происходит перетекание вещества на компактный объект и выделяется большое количество энергии вблизи него) представляет собой две звезды, одна из которых является релятивистским компактнымн объектом - белым карликом, нейтронной звездой или черной дырой. Вторая звезда в двойной системе заполняет свою так называемую полость Роша.

Полость Роша представляет собой воображаемую область, где гравитационное притяжение объекта преобладает над как гравитационным притяжением его компаньона, так и над центробежными силами во вращающейся системе.

Уравнение для потенциала можно записать в виде:

$$\Phi_R(r) = -\frac{GM_1}{|\vec{r}-\vec{r_1}|} - \frac{GM_2}{|\vec{r}-\vec{r_2}|} - \frac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 \tag{2.20}$$

Эффективный (по объему) размер полости Роша объекта приблизительно (с точностью около 1%) описывается следующей формулой (Eggleton, 1983):

$$\frac{R_2}{a} = \frac{0.49q^{2/3}}{0.6q^{2/3}+\ln(1+q^{1/3})}\ , q = \frac{M_2}{M_1}\ , 0 < q < \infty \tag{2.21}$$

Расстояние от точки L_1 до компактного объекта массой M_1:

$$\frac{b_1}{a} = 0.5 - 0.227\log q \tag{2.22}$$

Вещество из внутренней точки Лангранжа L_1 покидает звезду компаньон и движется практически по баллистической траектории, потому как скорость звука в этом веществе значительно меньше, чем скорость приобретаемая веществом в процессе движения в полости Роша компактного объекта.

Вещество не может подлететь к компактному объекту на расстояние меньше, чем радиус циркуляризации – радиус, на котором угловой момент вещества на круговой орбите $R_{\rm circ}v_{\rm K}(R_{\rm circ})$ сравнивается с угловым моментом вещества, вылетевшего из точки L_1:

$$R_{\rm circ}\left(\frac{GM_1}{R_{\rm circ}}\right)^{1/2} = b_1^2\omega\ ,\ \omega = \frac{2\pi}{P_{\rm orb}} \tag{2.23}$$

$$\frac{R_{\rm circ}}{a} = (1+q)\left(\frac{b_1}{a}\right)^4 = (1+q)[0.5-0.227\log q]^4 \tag{2.24}$$

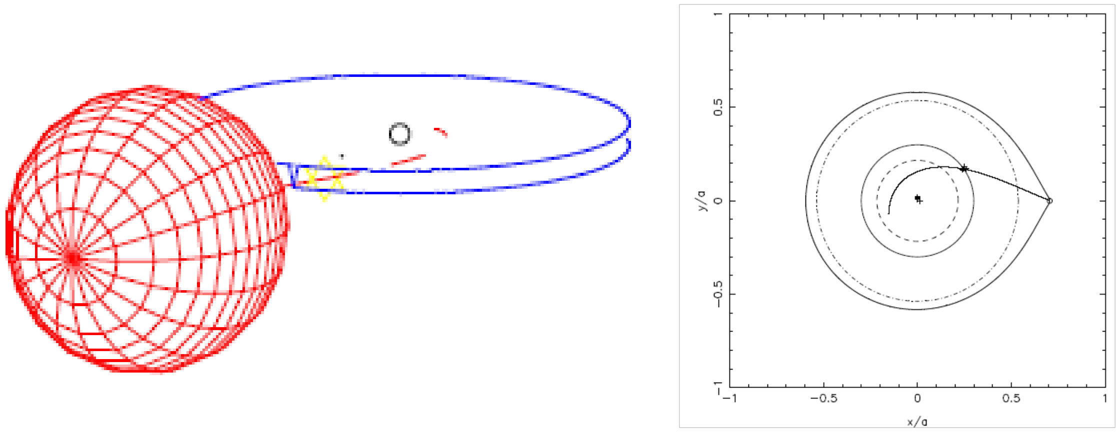


Рис. 2.9: Слева: иллюстрация двойной звездной системы с компактным объектом, аккрецирующим вещество с образованием аккреционного диска. Справа: схематический вид полости Роша (области гравитационного доминирования) компактного объекта. Штриховая окружность показывет радиус циркуляризации вещества (т.е. радиус, на котором условой момент вещества на баллистической траектории от $L1$ сравнивается с угловым моментом вещества на круговой орбите вокруг компактного объекта), вылетающего с внутренней точки Лагранжа $L1$ (находящейся примерно в положении [0.7,0.0]), штрих-пунктирная окружность показывает приливной радиус в этой двойной системе (см. текст).

Максимальный размер диска очевидно не может превышать размер полости Роша, однако еще на меньших размерах рост диска может быть остановлен приливными взаимодействитами со звездой-компаньоном. Вещество диска при взаимодействии со звездой теряет угловой момент и двигается к компактному объекту Papaloizou & Pringle (1977); Ichikawa & Osaki (1994). Можно записать следующее выражение для приливного радиуса $R_{\rm tidal}$:

$$\frac{R_{\rm tidal}}{a} \approx 0.112 + \frac{0.27}{1+q} + \frac{0.239}{(1+q)^2} \qquad (2.25)$$

Необходимо отметить, что аккреционный диск не обязан быть аксиально симметричным, и, более того, он существенно не аксиально симметричен в своих внешних частях. В области столкновения баллистической струи, вылетающей из Л1 с внешней частью аккреционного диска воникает горячее пятно, которое может быть (и на самом деле действительно наблюдается) видно как отдельная излучающая структура в двойной системе.

В случае большого наклонения двойной системы разные ее части затмеваются звездой-компаньоном, что позволяет делать "томографические" снимки как в континууме (фотометрические наблюдения), так и в эмиссионных и абсорбционных линиях (спектроскопические наблюдения). Иллюстрация того, как затмеваются разные части

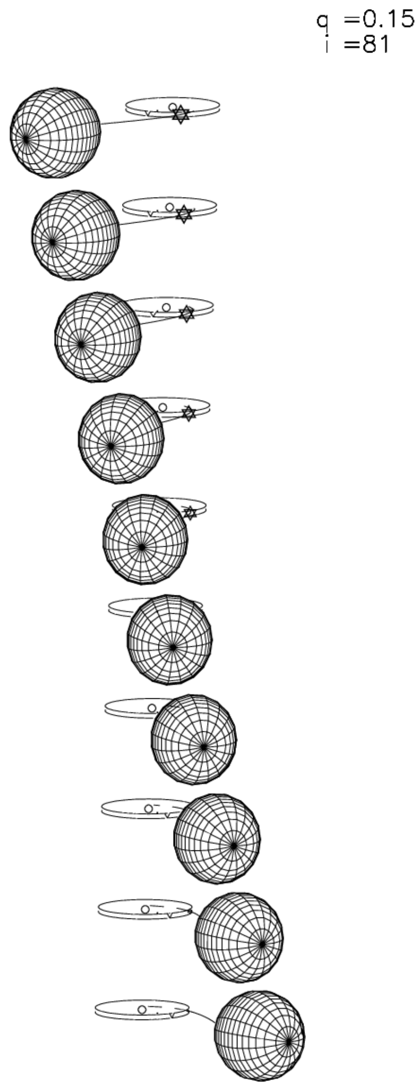
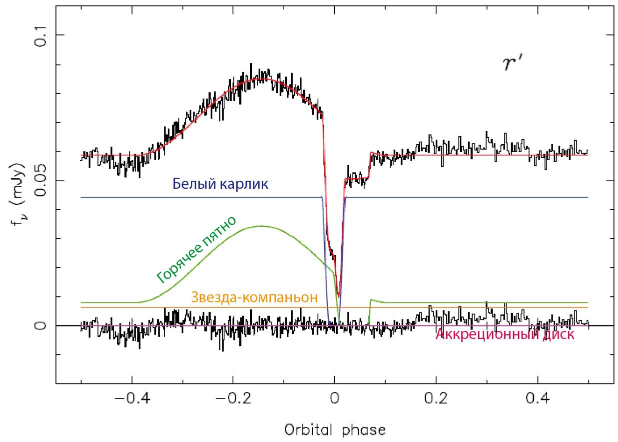


Рис. 2.10: Схематичное изображение разных фаз затмения в двойной системе с аккреционным диском и белым карликом. Горячее пятно, в котором баллистическая струя вещества сталкивается с внешними частями аккреционного диск, показано звездочкой. Стоит отметить, что видимость горячего пятна принципиально отличается от видимости белого карлика (центрального компактного объекта), что должно создавать асимметричные фазовые профили затмения.

двойной системы приведена на рис.2.10 Пример реальных наблюдений с обозначенными вкладами различных компонент двойной системы приведен на рис.2.11



Parameter	XZ Eri Model
Inclination i	$80\overset{\circ}{.}16 \pm 0\overset{\circ}{.}09$
Mass ratio $q = M_r/M_w$	0.1098 ± 0.0017
White dwarf mass $M_w/M_\odot$	0.767 ± 0.018
Secondary mass $M_r/M_\odot$	0.0842 ± 0.0024
White dwarf radius $R_w/R_\odot$	0.0112 ± 0.0003
Secondary radius $R_r/R_\odot$	0.1315 ± 0.0019
Separation $a/R_\odot$	0.619 ± 0.005
White dwarf radial velocity K_w/km s^{-1}	49.9 ± 0.9
Secondary radial velocity K_r/km s^{-1}	454.7 ± 0.4
Outer disc radius R_d/a	0.3009 ± 0.0025
Minimum circularisation radius R_{min}/a	0.2229 ± 0.0014
White dwarf temperature T_w/K	17000 ± 500

Рис. 2.11: Слева – пример кривой затмения в двойной системе XZ Eri (Feline et al., 2004). Справа показаны параметры двойной системы, полученные из моделирования полученной кривой затмения.

Как видно, моделирование затменных кривых позволяет достаточно точно определять большое количество параметров в системе. В частности, необходимо особо отметить:

- Измерение масс компаньонов. Измерение массы белых карликов является в настоящее время достаточно горячей темой в связи с тем, что современные теории термоядерного горения на их поверхностях предсказывают, что слабоаккрецирующие белые карлики должны в долгосрочной перспективе терять массу, а не приобретать ее. Предсказывается, что масса, накопленная про аккреции, будет выбрасываться с поверхности белого карлика и из двойной сиистемы при взрывах их атмосфер (феномен классических Новых звезд).

- Измерение радиусов компаньонов.

- Внешний радиус аккреционного диска.

2.3.3 Пульсации яркости нейтронных звезд

При наблюдении процессов, происходящих на поверхности быстровращающихся нейтронных звезд мы неизбежно должны сталкиваться с проявлениями эффектов специальной и общей теории относительности. Действительно – частоты вращения некоторых нейтронных звезд составляют примерно ν ~300–500 Гц, а а приблизительный размер оценивается как 10-20 км. Это означает, что линейная скорость вращения вещества на экваторе нейтронной звезды может быть

$$v \sim 2\pi\nu R \sim 2-6\cdot 10^4 \text{ км/сек} \sim 0.07-0.2c \tag{2.26}$$

или $\sim 0.1-0.2c$, а гравитационное красное смещение на поверхности НЗ

$$z = \frac{dt_1}{dt_0} = \sqrt{1-\frac{R_g}{R}} \sim 0.8-0.9\ ,\, R_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{2.27}$$

При таких параметрах релятивистские искажения уже довольно существенны.

Предположим, что пульсации рентгеновского потока нейтронной звезды вызваны вращением "горячего пятна" на её поверхности. Если рассматриваемое пятно излучает по закону абсолютно черного тела, тогда диаграмма направленности излучения в собственной системе пятна представляет собой константу – пятно излучает изотропно, по закону Ламберта. В нерелятивистском приближении удаленный наблюдатель будет регистрировать косинусоидально изменяющийся поток – закон изменения потока для наблюдателя будет задаваться законом изменения величины телесного угла, который занимает излучающее пятно в небе наблюдателя.

Рассмотрим простейшую геометрию излучающей системы: "горячее пятно" вращается на широте 45° нейтронной звезды, ось вращения нейтронной звезды наклонена к нам под углом 45° (см. рис. 2.12). В такой конфигурации пятно движется между положениями "прямо на наблюдателя" и "под прямым углом к наблюдателю" (см. рис.2.12).

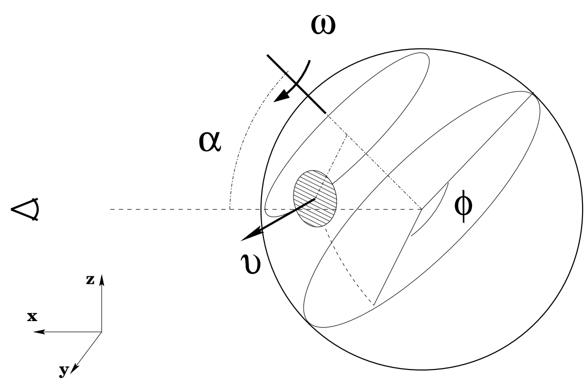


Рис. 2.12: Простейший вариант геометрии излучающей области во вращающейся системе с нейтронной звездой

Примем за положение с нулевой фазой такую конфигурацию, при которой излучающее пятно находится в зените – угол ϕ на рис. 2.12 равен 0. Если частота (круговая $\omega = 2\pi\nu$) вращения нейтронной звезды равна ω, то положение площадки описывается системой:

$$x \;=\; \frac{R}{2}(1-\cos\omega t)$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\omega t \\
z &= \frac{R}{2}(1+\cos\omega t)
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

косинус угла между нормалью к бесконечно малой излучающей площадке и лучом зрения наблюдателя равен θ:

$$
\cos\theta = \frac{1}{2}(1-\cos\omega t) \tag{2.29}
$$

а проекция вектора скорости площадки $\vec{v}$ на луч зрения наблюдателя:

$$
v\ \cos\delta = \dot{x} = \frac{R\omega}{2}\sin\omega t = \frac{v}{\sqrt{2}}\sin\omega t \tag{2.30}
$$

здесь v – линейная скорость движения пятна. Если не учитывать влияние релятивистской аберрации лучей, то изменение потока для удаленного наблюдателя будет происходить по закону:

$$
I \sim \cos\theta \sim \frac{I_0}{2}(1-\cos\omega t) \tag{2.31}
$$

здесь I_0 – поток, регистрируемый в момент, когда площадка находится в положении $\phi = \pi$ (“прямо на наблюдателя”)

Частота (энергия) фотона для удаленного наблюдателя при учете эффектов специальной теории относительности будет меняться по закону:

$$
\omega = \omega_0\gamma\ (1+\beta\cos\delta) \tag{2.32}
$$

,где $\beta = v/c$, а $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Вдоль траектории фотонов сохраняется величина $I(\nu)/\nu^3$ (плотность числа заполнения фотонов в фазовом пространстве), где $I(\nu)$ – поток энергии излучения на частоте ν.

Это можно легко показать, рассмотрев фазовый объем фотонов d^3xd^3p на луче зрения.

Интенсивность излучения I_ν – энергия, переносимая фотонами, имеющими частоты в диапазоне $(\nu, \nu + d\nu)$, распространяющиеся в телесном угле $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ через площадку dA по нормали к ней за время dt.

$$
I_\nu \sin\theta d\theta d\phi dA dt \tag{2.33}
$$

Импульс фотонов в направлении рассматриваемого телесного угла

$$
p = \frac{h\nu}{c}, \quad \text{а значит} \;\; d^3p = \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu \sin\theta d\theta d\phi \tag{2.34}
$$

Пространственный объем, занимаемый этими фотонами - это цилиндр с высотой cdt и площадью основания dA, т.е. $d^3x = cdtdA$. Следовательно, получаем фазовый обьем:

$$2\frac{\nu^2}{c^2}d\nu\sin\theta d\theta d\phi dAdt = 2\frac{d^3pd^3x}{h^3} \tag{2.35}$$

здесь фактов 2 учитывает то, что фотоны могут иметь две поляризации. Сравнивая с (2.33) получаем количество энергии на единицу фазового объема $c^2I_\nu/2\nu^2$. Каждый фотон несет энергию $h\nu$, поэтому получаем оличество фотонов на единицу фазового объема :

$$n = \frac{c^2I_\nu}{2h\nu^3} \tag{2.36}$$

Возвращаемся к расчету искажений фазовой кривой пульсирующей нейтронной звезды.

Поскольку количество фотонов для наблюдателя в любых системах отсчета должно быть одинаково получаем, что

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} \text{ – Лоренц-инвариант} \tag{2.37}$$

Если наш спектр излучения не зависит от частоты (т.е. если $I(\nu)$ =const), то:

$$I = I_0\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3 = I_0\gamma^3(1+\beta\cos\delta)^3 \tag{2.38}$$

Однако, если наблюдаемый спектр отличается от $I(\nu)$ =const, тогда надо учесть, что, регистрируя излучение на одной и той же энергии. наблюдаетель будет получать фотоны из слегка разных частей первичного спектра. Предположим, что в точке ν_0 спектр у нас имеет вид степенного закона с показателем α: $I(\nu)d\nu \sim \nu^{-\alpha}d\nu$. Тогда:

$$I_1(\nu_1) = I_0(\nu_0)\left(\frac{\nu_1}{\nu_0}\right)^3 \tag{2.39}$$

$$I_1(\nu_0) = I_1(\nu_1)\left(\frac{\nu_0}{\nu_1}\right)^{-\alpha} = I_0(\nu_0)\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^3\left(\frac{\nu_0}{\nu_1}\right)^{-\alpha} = I_0(\nu_0)\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{3+\alpha} \tag{2.40}$$

$$I_1(\nu_0) = I_0(\nu_0)\gamma^{3+\alpha}(1+\beta\cos\delta)^{3+\alpha} \tag{2.41}$$

В результате, получаем конечную форму профиля импульса:

$$I_1(\nu_0) = I_0(\nu_0)I \sim \left(\frac{1-\cos\omega t}{2}\right)\left(\frac{1+\beta\cos\delta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^{3+\alpha} \tag{2.42}$$

здесь $\beta = R\omega/\sqrt{2}c$, а $\beta\cos\delta = R\omega\sin\omega t/2$

Основная сложность в применении этой простой теории к наблюдениям заключается в том, что мы не знаем точно диаграмму направленности излучения пятна в своей системе отсчета. Более того, мы точно знаем, что излучение горячего пятна на поверхности нейтронных звезд не является излучением абсолютно черного тела, а модифицированно рассеянием в приповерхностных слоях. Это несомненно должно сказаться на диаграмму направленности излучения пятна.

В частности, излучение аккрецирующих миллисекундных пульсаров, которое в настоящее время дает данные наилучшего качества с быстровращаюшихся нейтронных звезд, в значительной степени формируется в результате комптоновского рассеяния на горячих электронах аккреционной колонки у магнитных полюсов нейтронных звезд, и, следовательно, не имеет Ламбертовскую диаграмму направленности излучения.

Наиболее надежными в этом смысле объектами исследования являются, пожалуй, пульсации "горячего" пятна на поверхности вращающихся нейтронных звезд во время всплесков термоядерного горения. В эти моменты энерговыделение возникает глубоко под фотосферой и атмосферой нейтронной звезды, что позволяет исключить модификацию диаграммы направленности излучения в оптически тонких средах (однако расчеты показывают, что и в этом случае диаграмма направленнности излучения не совсем Ламбертовская) К сожалению, рентгеновские барстеры во время термоядерного всплеска пульсируют малое время, и для поиска релятивистских искажений точности существующих инструментов уже не хватает.

Для демонстрации применимости метода тем не менее рассмотрим излучение аккрецирующего миллисекундного рентгеновского пульсара SAX J1808.4–3658 (частота пульсаций $\nu = 400.9752105$ Гц). Рассмотрим только относительно мягкое излучение пульсара на энергии ниже 3-4 кэВ. В излучении выше 4–5 кэВ в излучении пульсара преобладает вклад комптонизированного излучения в облаке горячей оптически тонкой плазмы, который имеет более сложную диаграмму направленности, поэтому в профиле импульса на этих энергиях могут появляться (что действительно наблюдается) дополнительные искажения.

Фазовая кривая пульсации в диапазоне 2–4 кэВ показана на рис. 2.13 (отметим, что для получения этой кривой необходимо учесть движения нейтронной звезды по орбите в двойной системе).

На этом же рисунке сплошной кривой показана аппроксимация наблюдаемого профиля моделью косинусоидального пульса с искажениями за счет эффектов специальной теории относительности. При построении модели было использовано значение наклона степенного спектра $\alpha = 1$ в энергетических единицах, или $\Gamma = 2$ в фотонных (фотонный индекс спектра). Пунктирной линией показан простой косинусоидальный профиль. Видно, что передний фронт наблюдаемого импульса несколько круче косинусоидального, а задний фронт – положе. Полученный при аппроксимации параметр $\beta = (6.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-2}$ (линейная скорость поверхности звезды). Отсюда, радиус нейтронной звезды в принятой модели:

$$R = \frac{\sqrt{2} c\beta}{2\pi\nu} \sim 11$$

Из разности наблюдаемого профиля и используемой модели в плоской метрике(спец. релятивистских искажений) – см. рис. 2.13 – видно, что пик наблюдаемого профи-

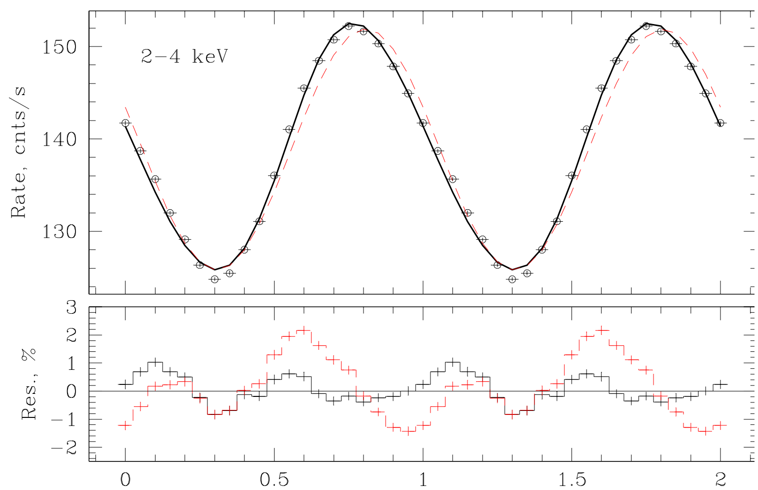


Рис. 2.13: Профиль импульса миллисекундного пульсара SAX J1808.4–3658. Сплошной кривой показана аппроксимация профиля импульса описанной моделью с релятивистскими искажениями. Пунктирной линией показана аппроксимация импульса простым косинусом. На нижнем рисунке показаны отклонения наблюдаемого профиля импульса от аппроксимаций (в процентах). Отклонения, остающиеся при использовании модели пятна с релятивистскими искажениями, в значительной степени убираются учетом геометрии Шварцшильда вблизи нейтронной звезды.

ля несколько шире, чем предсказывается моделью (на боковых частях профиля наблюдаются положительная разность “наблюдения-модель”). Такая “растянутость” дополнительно возникает из-за влияния эффектов общей теории относительности. В частности, параметр $(1-\frac{R_g}{R})^{-1}$, характеризующий степень отклонения от пространства-времени Минковского, в районе нашего “горячего” пятна может быть $\sim$1.1-1.2 (масса нейтронной звезды считается равной $\sim$1.4 $M_\odot$). Не вычисляя точный профиль импульса в пространстве-времени Шварцшильда можно сделать приблизительную оценку эффекта. В целом, влияние метрики Шварцшильда на профиль импульса можно свести к изменению фотонных траекторий, а точнее говоря, углов между ними. Если на поверхности нейтронной звезды две фотонных траектории были расположены между собой под углом η, то угол между ними на бесконечности (в первом приближении) будет равен η':

$$\frac{\eta'}{\eta} \sim \left(1-\frac{R_g}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} > 1$$

здесь R - радиус, а $R_g = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус нейтронной звезды. Если мы теперь при аппроксимации учтем это “угловое растяжение”, введя в фазу мультипликативный параметр $k = \frac{\eta}{\eta'}$, получится, что отклонения данных от модели станут меньше 0.5% (модель без учета этого эффекта давала отклонения $\sim$1% на боках пульса). В новой аппроксимации параметр $\beta = (8.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-2}$, а параметр $k = 0.91 \pm 0.01$. Первый параметр дает радиус нейтронной звезды $R \sim 13$ км, а второй – $R \sim 19$км, что, учитывая оценочный характер наших геометрических поправок, есть очень хорошее согласие.

Конечно же, все использованные модели пульсации системы SAX J1808.4–3658 слишком упрощены. Была взята определенная геометрия, которая может не совсем соответствовать реальной геометрии системы, рассматривалось только бесконечно малое пятно. Не в полной мере учитывались эффекты общей теории относительности и эффекты рассеяния в атмосфере горячего пятна, изменяющие диграмму направленности его излучения.

Литература

Barret D., Vaughan S., 2012, ApJ, 746, 131

Eggleton P. P., 1983, ApJ, 268, 368

Giacconi R., Gursky H., Kellogg E., Schreier E., Tananbaum H., 1971, ApJ, 167, L67

Feline W. J., Dhillon V. S., Marsh T. R., Brinkworth C. S., 2004, MNRAS, 355, 1

Accretion Power in Astrophysics, ISBN 0521620538. Cambridge University Press

Ichikawa S., Osaki Y., 1994, PASJ, 46, 621

Leahy D. A., Darbro W., Elsner R. F., Weisskopf M. C., Kahn S., Sutherland P. G., Grindlay J. E., 1983, ApJ, 266, 160

Papaloizou J., Pringle J. E., 1977, MNRAS, 181, 441

Vaughan S., Edelson R., Warwick R. S., Uttley P., 2003, MNRAS, 345, 1271

Vikhlinin A., et al., 1994, ApJ, 424, 395