

# Физические основы естествознания

## задачи

1. **Длина формирования.** Релятивистский электрон (лоренц-фактор  $\gamma$ ) движется по прямой, затем по части окружности радиуса  $R_c$ , и затем вновь по прямой. Определить характерную частоту излучения, если длина искривленного сегмента  $L \ll R_c/\gamma$ .
2. **Мера дисперсии.** Разность времен прихода импульсов на частотах 408 МГц и 409 МГц от радиопульсара, находящегося на расстоянии 1 кпк от Земли (1 пк = 3 световых года), составляет 1 с. Определить минимальную частоту электромагнитных волн, которые еще могут распространяться в межзвездной плазме и найти характерную концентрацию электронов на луче зрения.
3. **Матрица  $5 \times 5$ .** Найти матрицу поворотов  $K_{ij}$  для коэффициентов  $a$  при повороте на угол  $\Theta$  вокруг оси  $x$ , описывающую вероятность измерить проекцию момента импульса  $+2, +1, 0, -1, -2$ . Полярные углы преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}\sin \theta' \cos \varphi' &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \cos \theta' &= \cos \theta \cos \Theta - \sin \theta \sin \varphi \sin \Theta, \\ \sin \theta' \sin \varphi' &= \cos \theta \sin \Theta + \sin \theta \sin \varphi \cos \Theta,\end{aligned}\tag{1}$$

а сферические функции суть

$$Y_2^{(2c)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2 \theta \cos 2\varphi,\tag{2}$$

$$Y_2^{(c)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi,\tag{3}$$

$$Y_2^{(0)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4\pi}} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2},\tag{4}$$

$$Y_2^{(s)} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{4\pi}} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi,\tag{5}$$

$$Y_2^{(2s)} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{4\pi}} \sin^2 \theta \sin 2\varphi.\tag{6}$$

Покажите, что

- (a) детерминант этой матрицы равен единице,
- (b) обратная матрица равна транспонированной,
- (c) сумма квадратов всех строк и всех столбцов равны единице,
- (d) все компоненты матрицы, усредненные по углам  $\Theta$  ( $1/2 \int_0^\pi K_{ij}(\Theta) \sin \Theta d\Theta$ ), дают  $1/5$ .

4. **Неравенства Белла.** Два смешанных фотона

$$\psi(1, 2) = \frac{\psi_1(\uparrow)\psi_2(\uparrow) + \psi_1(\rightarrow)\psi_2(\rightarrow)}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

испускаются в двух противоположных направлениях. Они взаимодействуют с двумя поляризаторами, которые с одинаковой вероятностью могут находиться лишь в трех положениях относительно некоторой выделенной оси. Записать неравенства Белла и найти углы ориентации поляризаторов, при которых оно нарушается.

5. **Эффект Хокинга.** Оценить температуру черной дыры, используя простейшие соотношения квантовой механики и соображение, что черная дыра больше всего исказит спектр нулевых колебаний, длина которых близка к размеру горизонта (области, откуда не может выйти даже свет). Воспользовавшись соотношением  $L = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T^4$ , оцените массу черных дыр, которые испарятся за время жизни Вселенной ( $\approx 10$  млрд лет).

6. **Гравитационное излучение.** Получить оценку (без численного коэффициента) формулы для мощности гравитационного излучения Эйнштейна  $W_g$  (эрг/с) от двух нейтронных звезд РАЗНЫХ МАСС  $M_1$  и  $M_2$ , вращающихся по круговым орбитам с большой полуосью  $a$  (т.е. ответ должен быть выражен через  $M_1$ ,  $M_2$  и  $a$ , а не через угловую скорость вращения  $\Omega$ ). Для этого нужно найти эквивалент формулы плотности энергии  $w = E^2/8\pi$  для напряженности гравитационного поля (ускорения свободного падения)  $g$ , и определить, как величина  $g$ , перпендикулярная направлению на двойную систему, будет зависеть от  $r$  на больших и малых расстояниях. Оценить у Земли безразмерную величину  $h = g/(\Omega c)$  в момент, когда сигнал будет

соответствовать касанию двух нейтронных звезд (т.е. для  $a = R$ ), если двойная система находится на расстоянии 10 Гпк. Почему гравитационные антенны приходится делать такими большими (несколько километров)?

7. **Метрический тензор.** Найдите метрический тензор плоского пространства

(а) в координатах  $u, v, \varphi$ , связанных со сферическими координатами  $r, \theta$  и  $\varphi$  соотношениями

$$u = r(1 - \cos \theta), \quad (8)$$

$$v = r(1 + \cos \theta). \quad (9)$$

(б) в координатах  $u, v, z$ , связанных с цилиндрическими координатами  $r, \varphi$  и  $z$  соотношениями

$$u = r(1 - \cos \varphi), \quad (10)$$

$$v = r(1 + \cos \varphi). \quad (11)$$

Запишите выражения для  $\text{div}$  и  $\text{rot}$  в этих координатах.

8. **Кривизна сферы.** Проверьте, что для сферы радиуса  $R_c$  формула Гаусса дает кривизну  $k = R_c^{-2}$  и для сферических координат, когда  $d\mathbf{r}^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

9. **Кривизна гиперboloида.** Найдите кривизну поверхности гиперboloида вращения

$$x^2 + y^2 - z^2 = R^2. \quad (12)$$

Необходимые числа

Постоянная Больцмана  $k_B = 1.38 \times 10^{-16}$  эрг/К

Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma_{SB} = 5,67 \times 10^{-5}$  эрг/(с см<sup>2</sup> К<sup>4</sup>)

Гравитационная постоянная  $G = 6.67 \times 10^{-8}$  см<sup>3</sup>/(г с<sup>2</sup>)