

## Задачи

### 1. Распределение Гаусса

Используя формулу Стирлинга  $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ , покажите, что при  $N \gg 1$  и  $K \gg 1$  вероятность биномиального распределения

$$P_N^K = \frac{N!}{K!(N-K)!} \quad (1)$$

стремится к распределению Гаусса.

### 2. Преобразования Лоренца

Электронно-позитронные пары рождаются в покое в постоянном скрещенном электромагнитном поле  $\mathbf{E} = (1 - \varepsilon)B_0 \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ , где  $\varepsilon \ll 1$ .

Найти среднюю (по времени) энергию частиц.

Указание: В системе, движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V = c|E|/|B|$ , электрического поля нет, так что частицы движутся по окружности вокруг магнитного поля, по-прежнему направленному вдоль оси  $z$ . Ответ выразить через Лоренц-фактор  $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ .

### 3. Операция $\nabla$

Найти  $\nabla \cdot \mathbf{e}_r$  и  $\nabla \varphi$ .

4. **Прямоугольная сетка** Четыре величины являются компонентами тензора, если при повороте осей на угол  $\varphi$  они преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} m_{x'x'} &= m_{xx} \cos^2 \varphi + m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + m_{yx} \sin \varphi \cos \varphi + m_{yy} \sin^2 \varphi, \\ m_{x'y'} &= -m_{xx} \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos^2 \varphi - m_{yx} \sin^2 \varphi + m_{yy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ m_{y'x'} &= -m_{xx} \sin \varphi \cos \varphi - m_{xy} \sin^2 \varphi + m_{yx} \cos^2 \varphi + m_{yy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ m_{y'y'} &= m_{xx} \sin^2 \varphi - m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi - m_{yx} \sin \varphi \cos \varphi + m_{yy} \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажите, что для прямоугольной сетки симметричный тензор должен быть пропорционален единичной матрице.

## 5. Косая линейка

Найдите метрику для "косой линейки"

$$x' = x - y, \quad (3)$$

$$y' = y. \quad (4)$$

Нарисуйте соответствующую систему координат.

## 6. Еще одно плоское пространство

- Найдите метрический тензор плоского пространства в координатах  $u, v, z$ , связанных с цилиндрическими координатами  $r, \varphi$  и  $z$  соотношениями

$$u = r(1 - \cos \varphi), \quad (5)$$

$$v = r(1 + \cos \varphi), \quad (6)$$

$$z = z. \quad (7)$$

Нарисуйте соответствующую систему координат.

- То же для сферических координат  $r, \theta$  и  $\varphi$ , если

$$u = r(1 - \cos \theta), \quad (8)$$

$$v = r(1 + \cos \theta), \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi. \quad (10)$$

## 7. Инвариантность тензора энергии-импульса

Покажите, что при преобразованиях Лоренца в верхнем левом углу тензора энергии-импульса всегда стоит величина  $(E^2 + B^2)/8\pi$ . Для простоты рассмотреть волну с  $E_y = B_z$ , преобразование вдоль оси  $x$ .

Указание: Поля преобразуются по закону

$$E'_y = \frac{E_y - V/c B_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - V/c E_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (11)$$

## 8. Кривизна сферы

- Найти кривизну поверхности для метрики с координатами  $(r_1, \varphi)$

$$\langle g \rangle = \begin{pmatrix} (1 - r_1^2/R_c^2)^{-1} & 0 \\ 0 & r_1^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

- Проверьте, что для сферы радиуса  $R_c$  формула Гаусса дает кривизну  $k = R_c^{-2}$  и для сферических координат, когда  $dr^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

## 9. Кривизна гиперboloида вращения

Найдите кривизну поверхности гиперboloида вращения

$$x^2 + y^2 - z^2 = R^2. \quad (13)$$

## 10. Окружности на сфере

Найдите коэффициент  $\lambda$  в выражении

$$L_0/R - 2\pi = \lambda k \delta S \quad (14)$$

(также для сферической поверхности).

## 11. Формула Эйнштейна

Получите формулу Эйнштейна для мощности излучения гравитационных волн при условии  $M_1 \neq M_2$ . Покажите, что и в этом случае излучение идет на удвоенной частоте.

## 12. Гравитационная волна от слияния двух нейтронных звезд

Оцените расстояние, на котором должны слиться две нейтронные звезды, чтобы гравитационная волна на Земле была бы заметна и без приборов ( $\delta g = 0.1 g$ ).

## 13. Объем Вселенной

Найдите трехмерный объем Вселенной для  $\kappa = +1$  в метрике Фридмана-Робертсона-Уолкера.

#### 14. Про эллипс

Переходя при интегрировании к углу  $E$  (эксцентрисическая аномалия)

$$r \cos \varphi = a(\cos E - e), \quad (15)$$

$$r \sin \varphi = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (16)$$

найдите среднее по времени расстояние планеты от фокуса  $\langle r(t) \rangle$ .

#### 15. Функция масс

Рассмотрев движение по круговым орбитам двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , найдите комбинацию масс и угла наклона орбиты  $i$ , которую можно определить, измеряя лучевую скорость движения звезды 1.

#### 16. Черная дыра

Найдите расстояние между точками с координатами  $r = r_g$  и  $r = 2r_g$  для шварцшильдовской черной дыры.

#### 17. Движение периастра

В рамках нерелятивистской теории Всемирного тяготения для потенциала

$$\varphi_g = -\frac{GM}{r - r_g} \quad (17)$$

(т.н. потенциал Пачиньского-Вииты) найдите поворот орбиты  $\Delta\varphi$  за один период обращения при условии  $r \gg r_g$ .