Август 2014 г. **Том 184, № 8**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме

В.С. Бескин, А.А. Желтоухов

Обсуждается момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме. Показано, что для правильного определения одной из компонент этого момента сил необходимо учитывать момент импульса электромагнитного поля внутри тела.

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.–q**, 97.60.Gb DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408e.0865

Содержание

1. Введение

Как известно, первой моделью, предложенной для описания магнитосферы радиопульсаров — вращающихся нейтронных звёзд, является простейшая вакуумная модель [1, 2]. Согласно этой модели, восходящей к классической работе А. Дойча [3], нейтронная звезда представляет собой хорошо проводящий намагниченный шар (с радиусом R и магнитным моментом $\mathfrak{m}$), вращающийся в вакууме с угловой скоростью Ω. При этом основное энерговыделение происходит за счёт магнитодипольного излучения [1], которое приводит к замедлению скорости вращения и уменьшению угла χ между осью вращения z' и магнитным моментом $\mathfrak{m}$ [4]. В этом случае проекция тормозящего момента сил на ось вращения выражается как

$$K_{z'} = -\frac{2}{3}\frac{\mathfrak{m}^2}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^3 \sin^2\chi\,, \tag{1}$$

[1] Вклад электрического квадрупольного излучения, связанного с перераспределением зарядов внутри шара, оказывается в $(\Omega R/c)^4$ раз меньше.

В.С. Бескин, А.А. Желтоухов. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: beskin@lpi.ru, zhelto@gmail.com

Статья поступила 2 декабря 2013 г., после доработки 15 декабря 2013 г.

а полное энерговыделение $W_{\rm tot} = -\mathbf{\Omega K}$ записывается в виде [5]

$$W_{\rm tot} = \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{m}^2\Omega^4}{c^3}\sin^2\chi\,. \tag{2}$$

Для описания эволюции угла χ нужно учесть проекцию момента сил на ось x', лежащую в плоскости $\mathbf{\mathfrak{m}\Omega}$ и поэтому также вращающуюся вокруг оси z' с угловой скоростью Ω:

$$K_{x'} = \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{m}^2}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^3 \sin\chi\cos\chi\,. \tag{3}$$

Как легко проверить, тормозящий момент $\mathbf{K}$ при этом оказывается перпендикулярным вектору намагниченности $\mathfrak{m}$. Поэтому, согласно уравнениям Эйлера, проекция угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на эту ось должна оставаться постоянной [4]:

$$\Omega\cos\chi = \text{const}\,. \tag{4}$$

Как мы видим, характерные времена эволюции угла χ и угловой скорости вращения Ω будут одинаковыми.

Позднее, правда, оказалось, что если магнитосфера нейтронной звезды заполнена плазмой, которая экранирует продольное (т.е. параллельное магнитному полю) электрическое поле, то магнитосферная плазма полностью подавляет магнитодипольное излучение [6, 7]. Что касается потерь энергии, то в этом случае они должны быть связаны с действием силы Ампера, обусловленной поверхностными токами, которые замыкают продольные токи, текущие в магнитосфере пульсара; в случае нулевых продольных токов полные потери энергии равны нулю.

Сейчас это утверждение, которое на протяжении многих лет со времени опубликования в 1983 г. работы [6] вызывало немалые споры, можно считать доказанным. Так, например, численное решение для наклонного ротатора, полученного в бессиловом приближении А. Спитковским [8], не содержит магнитодипольной волны [9]. Здесь важно сразу подчеркнуть, что, как показано ниже, торможение намагниченного шара, вращающегося в вакууме, также связано с поверхностными

© В.С. Бескин, А.А. Желтоухов 2014

токами [10, 11], которые, однако, в этом случае являются чисто вихревыми поверхностными токами, не имеющими источников и стоков.

Впрочем, здесь мы не будем обсуждать модель магнитосферы, заполненной плазмой, а рассмотрим, казалось бы, полностью изученную задачу о вращении намагниченного шара в вакууме. Дело в том, что даже в рамках этой простейшей модели по некоторым вопросам всё ещё не достигнуто полной ясности. В частности, нет единого мнения о так называемом аномальном моменте сил, т.е. моменте сил, действующем в направлении оси y', перпендикулярной плоскости $\mathfrak{m}\boldsymbol{\Omega}$, и приводящем не к регулярному уменьшению угла χ, а к прецессии оси вращения. Такое название связано с тем, что величина этого момента сил

$$K_{y'} = \xi \frac{\mathfrak{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c} \right)^2 \sin\chi \cos\chi \,, \tag{5}$$

где ξ — численный коэффициент порядка единицы, оказывается в $(\Omega R/c)^{-1}$ раз больше, чем тормозящий момент $K_{z'}$. При этом разные авторы дают разные значения ξ, а именно: $\xi = 2/3$ [2], $\xi = 1$ [4, 12], $\xi = 1/5$ [13] и, наконец, $\xi = 3/5$ [14] (см. также работу [15], в которой, однако, заведомо не учитывался вклад электрического поля). С другой стороны, согласно [10, 16] аномальный момент вообще равняется нулю ($\xi = 0$), и поэтому подобной прецессии намагниченного шара не должно быть.

Понятно, что такая ситуация, в которой при рассмотрении элементарной, на первый взгляд, задачи до сих пор не достигнуто полного согласия, не может не вызывать удивления. Напомним, что аномальный момент сил, действующий на нейтронную звезду, будет вызывать её прецессию, причём для несферической звезды такая прецессия, накладываясь на вековое замедление вращения радиопульсара, должна приводить к наблюдаемому изменению так называемого параметра торможения $n_{\rm br} = \ddot{\Omega}\Omega/\dot{\Omega}^2$, существенно изменяя его величину [14, 17, 18].

Таким образом, рассматриваемый вопрос представляет не только теоретический, но и чисто практический интерес. Поэтому мы в настоящей статье попробуем по возможности прояснить ситуацию и показать, с чем связано такое многообразие результатов. Как мы увидим, в действительности в разных работах обсуждались разные величины, многие из которых нельзя интерпретировать как момент сил, действующий на намагниченный шар, вращающийся в вакууме. При этом сам расчёт будет проведён независимым способом в рамках так называемого квазистационарного формализма, который, как мы увидим, позволяет получить результат наиболее быстрым и последовательным образом.

2. Метод вычислений

Прежде всего сделаем несколько замечаний общего характера. Как отмечалось во введении, нас здесь будет интересовать лишь аномальный момент сил, действующий на намагниченный шар, вращающийся в вакууме. Кроме того, следует сразу сделать важное уточнение. Дело том, что, как видно из z-компоненты уравнения движения $\mathrm{d}\mathfrak{m}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{m}$,

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{m}_z}{\mathrm{d}t} = \Omega_x \mathfrak{m}_y - \Omega_y \mathfrak{m}_x \,, \tag{6}$$

регулярное изменение величины $\mathfrak{m}_z = \mathfrak{m}\cos\chi$, связанное с магнитодипольными потерями, возможно лишь при наличии у угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ вращающейся компоненты $\Omega_\perp$, лежащей в плоскости xy. Однако, как видно из этого же соотношения, величина $\Omega_\perp$ должна быть порядка обратного времени эволюции угла χ. Поэтому, как легко проверить, при анализе величины аномального момента таким дополнительным вращением можно пренебречь.

Ниже всюду мы будем считать шар идеально проводящим, так что в его объёме выполнено условие вмороженности:

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}_{\rm R} \times \mathbf{B} = 0 \,, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\beta}_{\rm R} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}/c$. Понятно, что для определения момента сил, действующего на шар со стороны электромагнитного поля, необходимо определить объёмные и поверхностные токи и заряды, связанные с вращением шара. В результате силы, действующие на шар, могут быть записаны в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \rho_{\rm e}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{c}\,\mathrm{d}V + \sigma_{\rm e}\mathbf{E}\,\mathrm{d}S + \frac{\mathbf{I}_{\rm S} \times \mathbf{B}}{c}\,\mathrm{d}S \,, \tag{8}$$

где два первых слагаемых в правой части соответствуют объёмному вкладу, а два вторых — поверхностному. Однако если предположить, что в объёме шара существуют лишь токи коротации $\mathbf{j} = c\rho_{\rm e}\boldsymbol{\beta}_{\rm R}$ (это и есть наше ключевое предположение), то легко проверить, что объёмная часть силы (8) будет равна нулю. Учитывая теперь, что на поверхности шара $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$ и $\mathrm{d}S = R^2\,\mathrm{d}o$, где $\mathrm{d}o$ — элемент телесного угла, получаем для полного момента сил

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{R^3}{4\pi} \int \Big(\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}(\mathbf{Bn}) + \mathbf{n} \times \mathbf{E}\left(\{\mathbf{E}\}\,\mathbf{n}\right) \Big)\,\mathrm{d}o \,, \tag{9}$$

где фигурными скобками обозначены скачки поля на поверхности шара [2]. Таким образом, задача о нахождении момента сил сводится к задаче нахождения электромагнитного поля внутри и вне шара.

Далее, отметим, что, поскольку уравнения Максвелла линейны, все электромагнитные поля можно разложить на осесимметричную (когда ось намагниченности параллельна оси вращения) и ортогональную компоненты. При этом общее решение будет иметь вид

$$A = A^{\parallel}\cos\chi + A^{\perp}\sin\chi \,, \tag{10}$$

где A — произвольная компонента поля. Как видно из выражения (5), при интегрировании в (9) ненулевой вклад будут давать лишь перекрёстные члены, в которых одна из компонент в произведениях $\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}\}\,B_r$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{E}\,\{E_r\}$ относится к осесимметричной компоненте, а другая — к ортогональной. Так, для точечного магнитного диполя осесимметричная компонента будет совпадать со статическим магнитным полем

$$\mathbf{B}^{\parallel} = \frac{3(\mathfrak{m}\mathbf{n})\,\mathbf{n} - \mathfrak{m}}{r^3} \,. \tag{11}$$

[2] При этом важно, что компоненты полей, не стоящие в фигурных скобках, непрерывны на поверхности шара.

Что касается ортогонального ротатора, то эти поля (для точечного диполя) должны иметь вид [3, 5]

$$B_r^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \sin\theta \,\mathrm{Re} \left(2 - 2\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c}\right) \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\varphi - \mathrm{i}\Omega t\right), \quad (12)$$

$$B_\theta^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \cos\theta \,\mathrm{Re}\left(-1 + \mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) \times \times \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\varphi - \mathrm{i}\Omega t\right), \quad (13)$$

$$B_\varphi^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \,\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i} - \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\, \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}\right) \times \times \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\varphi - \mathrm{i}\Omega t\right), \quad (14)$$

$$E_r^{\perp} = 0, \quad (15)$$

$$E_\theta^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}\,\Omega}{r^2 c} \,\mathrm{Re}\left(-1 + \mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c}\right) \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\varphi - \mathrm{i}\Omega t\right), \quad (16)$$

$$E_\varphi^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}\,\Omega}{r^2 c} \cos\theta \,\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i} - \frac{\Omega r}{c}\right) \exp\left(\mathrm{i}\, \frac{\Omega r}{c} + \mathrm{i}\varphi - \mathrm{i}\Omega t\right). \quad (17)$$

Наконец, как и в большинстве работ, мы будем рассматривать случай достаточно медленного вращения, в котором естественный параметр задачи

$$\varepsilon = \frac{\Omega R}{c} \quad (18)$$

много меньше единицы; для большинства радиопульсаров $\varepsilon \approx 10^{-3}$–$10^{-4}$. Сравнивая теперь выражение (5) с общим соотношением (9) для момента сил $\mathbf{K}$, мы приходим к заключению, что при вычислении аномального момента нам потребуются лишь два первых члена в разложении электрического и магнитного поля по параметру ε.

Поэтому, по нашему мнению, наиболее удобный метод расчёта связан с так называемым квазистационарным формализмом, в рамках которого предполагается, что все поля зависят от азимутального угла φ и времени t лишь в комбинации $\varphi - \Omega t$. В этом случае временны́е производные можно заменить пространственными, в результате уравнения Максвелла примут вид [19]

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B}) = 0\,, \quad (19)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{j} - 4\pi\rho_{\mathrm{e}} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}\,. \quad (20)$$

Здесь и обнаруживается несомненное удобство предлагаемого нами метода. Действительно, если мы будем считать, что в объёме шара выполнено условие коротации $\mathbf{j} = c\rho_{\mathrm{e}} \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}}$, то не только вне шара, где заряды и токи отсутствуют, но и внутри шара правая часть уравнения (20) оказывается равной нулю. В итоге как внутри, так и вне шара должны выполняться соотношения

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{B} = -\nabla\psi\,, \quad (21)$$

$$\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{R}} \times \mathbf{E} = \nabla h\,, \quad (22)$$

где $\psi(r, \theta, \varphi - \Omega t)$ и $h(r, \theta, \varphi - \Omega t)$ — скалярные функции, которые могут быть найдены из условия непрерывности соответствующих компонент электрического и магнитного полей и из условий $\nabla\mathbf{E} = 0$ и $\nabla\mathbf{B} = 0$ вне шара.

Более того, предлагаемый нами метод позволяет получить необходимый результат с помощью простой итерационной процедуры. Действительно, если известно магнитное поле $B^{(0)}$ в нулевом порядке по параметру $\varepsilon = \Omega R/c$, то тогда, используя уравнение (21), можно найти электрическое поле $E^{(1)}$, соответствующее первому порядку по параметру ε. В свою очередь уравнение (22) позволяет найти магнитное поле $B^{(2)}$ во втором порядке. Этих двух шагов нам будет достаточно для определения аномального момента, пропорционального, как мы видели, квадрату малого параметра $\Omega R/c$.

Таким образом, задача свелась к нахождению двух скалярных функций, $\psi^{(1)}$ и $h^{(2)}$, полностью определяющих структуру электромагнитных полей с необходимой для нас точностью. Далее в большинстве случаев индексы (1) и (2) мы будем опускать.

3. Результаты

Рассмотрим прежде всего наиболее простой случай однородно намагниченного шара. Это означает, что в нулевом приближении по параметру ε магнитное поле внутри шара является однородным, а за его пределами совпадает с полем точечного диполя. Тогда компоненты магнитного поля нулевого порядка внутри шара будут иметь следующий вид:

$$B_r^{\perp} = \frac{2\mathfrak{m}}{R^3} \sin\theta \cos(\varphi - \Omega t)\,,$$
$$B_\theta^{\perp} = \frac{2\mathfrak{m}}{R^3} \cos\theta \cos(\varphi - \Omega t)\,, \quad (23)$$
$$B_\varphi^{\perp} = -\frac{2\mathfrak{m}}{R^3} \sin(\varphi - \Omega t)\,,$$

$$B_r^{\parallel} = \frac{2\mathfrak{m}}{R^3} \cos\theta\,, \quad B_\theta^{\parallel} = -\frac{2\mathfrak{m}}{R^3} \sin\theta\,, \quad B_\varphi^{\parallel} = 0\,. \quad (24)$$

Соответственно, вне шара

$$B_r^{\perp} = \frac{2\mathfrak{m}}{r^3} \sin\theta \cos(\varphi - \Omega t)\,,$$
$$B_\theta^{\perp} = -\frac{\mathfrak{m}}{r^3} \cos\theta \cos(\varphi - \Omega t)\,, \quad (25)$$
$$B_\varphi^{\perp} = \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \sin(\varphi - \Omega t)\,,$$

$$B_r^{\parallel} = \frac{2\mathfrak{m}}{r^3} \cos\theta\,, \quad B_\theta^{\parallel} = \frac{\mathfrak{m}}{r^3} \sin\theta\,, \quad B_\varphi^{\parallel} = 0\,. \quad (26)$$

Перейдём теперь к величинам первого порядка малости по параметру ε. Прежде всего отметим, что в этом порядке магнитное поле равно нулю. Этот, на первый взгляд неожиданный, результат непосредственно следует из соотношений (12)–(14), в которых нужно разложить экспоненциальный множитель в ряд Тейлора. Не могло появиться магнитное поле и за счёт ∇h, поскольку в этом порядке оно соответствовало бы монопольному магнитному полю.

Что касается электрического поля, то, сравнивая соотношения (7) и (21), получаем, что внутри шара всегда должно выполняться условие

$$\psi^{\mathrm{in}} = 0\,. \quad (27)$$

В результате имеем

$$
\begin{aligned}
E_r^{\perp \mathrm{in}} &= \frac{2\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega r}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
E_\theta^{\perp \mathrm{in}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega r}{c}\sin^2\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\quad E_\varphi^{\perp \mathrm{in}}=0\,,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r^{\parallel \mathrm{in}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega r}{c}\sin^2\theta\,,\\
E_\theta^{\parallel \mathrm{in}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega r}{c}\sin\theta\cos\theta\,,\quad E_\varphi^{\parallel \mathrm{in}}=0\,.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Заметим, что для осесимметричной компоненты дивергенция электрического поля не равна нулю, что соответствует ненулевой плотности заряда внутри шара

$$
\rho_{\mathrm{GJ}} = -\frac{\mathbf{\Omega B}}{2\pi c}\,. \tag{30}
$$

Величина ρ_{GJ} называется плотностью Гольдрайха–Джулиана [20], которые первыми получили это выражение для нейтронных звёзд. Для ортогональной компоненты вследствие условия $\mathbf{\Omega B}=0$ объёмная плотность заряда внутри шара будет равна нулю.

С другой стороны, вне шара, согласно (21), при нулевом потенциале $\psi=0$ электрическое поле имело бы вид

$$
\begin{aligned}
E_r^{\perp \mathrm{out}} &= -\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega r}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
E_\theta^{\perp \mathrm{out}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega r}{c}\sin^2\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\quad E_\varphi^{\perp \mathrm{out}}=0\,,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r^{\parallel \mathrm{out}} &= \frac{\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega r}{c}\sin^2\theta\,,\\
E_\theta^{\parallel \mathrm{out}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega r}{c}\sin\theta\cos\theta\,,\quad E_\varphi^{\parallel \mathrm{out}}=0\,.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Однако и в этом случае, как легко проверить, дивергенция электрического поля не равнялась бы нулю. Поэтому, чтобы получить бездивергентное электрическое поле вне шара, где заряды и токи, по определению, отсутствуют, данные выражения должны быть скорректированы с помощью функции ψ. Нетрудно проверить, что условию для полного поля $\nabla\mathbf{E}=0$ (а также условиям непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности шара $r=R$) удовлетворяют функции

$$
\begin{aligned}
\psi_0^{\perp} &= \frac{\mathfrak{m}}{r}\frac{\Omega}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)-\\
&\quad -\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega R^2}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
\psi_0^{\parallel} &= -\frac{\mathfrak{m}}{r}\frac{\Omega}{c}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\frac{\Omega R^2}{c}(3\cos^2\theta-1)\,.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Здесь мы, естественно, приняли во внимание отсутствие особенностей в центре шара и на бесконечности (и поэтому внутри шара выбрали лишь возрастающие решения, а вне шара — лишь убывающие на бесконечности решения), а также то, что полный заряд шара должен быть равен нулю [3].

[3] Подчеркнём, что, как видно из соотношения (21), потенциал $\psi_0^{\parallel}$ не является полным электрическим потенциалом статической осесимметричной задачи.

Таким образом, электрическое поле вне шара будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
E_r^{\perp \mathrm{out}} &= -\frac{3\mathfrak{m}}{r^4}\frac{\Omega R^2}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
E_\theta^{\perp \mathrm{out}} &= -\frac{\mathfrak{m}}{r^2}\frac{\Omega}{c}\cos(\varphi-\Omega t)+\\
&\quad +\frac{\mathfrak{m}}{r^4}\frac{\Omega R^2}{c}(1-2\sin^2\theta)\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
E_\varphi^{\perp \mathrm{out}} &= \frac{\mathfrak{m}}{r^2}\frac{\Omega}{c}\cos\theta\sin(\varphi-\Omega t)-\\
&\quad -\frac{\mathfrak{m}}{r^4}\frac{\Omega R^2}{c}\cos\theta\sin(\varphi-\Omega t)\,,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r^{\parallel \mathrm{out}} &= -\frac{\mathfrak{m}}{r^4}\frac{\Omega R^2}{c}(3\cos^2\theta-1)\,,\\
E_\theta^{\parallel \mathrm{out}} &= -\frac{2\mathfrak{m}}{r^4}\frac{\Omega R^2}{c}\sin\theta\cos\theta\,,\quad E_\varphi^{\parallel \mathrm{out}}=0\,.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Как легко проверить, для ортогональной компоненты вне шара электрическое поле складывается из радиационного поля излучения магнитного диполя (15)–(17) и квадрупольного поля зарядов, наводимых в шаре. Поле параллельной компоненты состоит только из статического поля квадруполя; естественно, эта компонента не генерирует электромагнитной волны. Наконец, скачки радиальной компоненты электрического поля, определяющие поверхностные заряды, выражаются как

$$
\begin{aligned}
\{E_r^{\perp}\} &= -5\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega R}{c}\sin\theta\cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\\
\{E_r^{\parallel}\} &= \frac{\mathfrak{m}}{R^3}\frac{\Omega R}{c}(3-5\cos^2\theta)\,.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

При этом для параллельной компоненты полный заряд оболочки не равен нулю, а заряд противоположного знака, связанный с гольдрайховской плотностью (30), равномерно распределён в объёме шара.

Определим теперь поля второго порядка по ε. Как видно из соотношения (9), интерес для нас будет представлять лишь магнитное поле. Действительно, только магнитное поле, которое входит в произведения с магнитным полем нулевого порядка, должно приводить к необходимому вкладу в аномальный момент. Между тем электрическое поле второго порядка дало бы величины лишь третьего порядка по параметру ε. Впрочем, как можно вновь получить непосредственно из соотношений (15)–(17), электрическое поле в этом порядке просто равно нулю,

$$
\mathbf{E}^{(2)}=0\,. \tag{37}
$$

Магнитное поле второго порядка находится по электрическому полю первого порядка из уравнения (22). Применяя ту же процедуру, что и для электрических полей, можно легко найти компенсирующие потенциалы h, необходимые для выполнения условия $\nabla\mathbf{B}=0$. В итоге внутри шара получаем

$$
h^{\perp \mathrm{in}} = -\frac{3}{5}\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega^2 r^3}{c^2}\right)\sin\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,,\quad h^{\parallel \mathrm{in}}=0\,. \tag{38}
$$

Соответственно, вне шара

$$\begin{aligned} h^{\perp \text{out}} &= \frac{\mathfrak{M}}{2}\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \sin\theta\cos(\varphi-\Omega t)- \\ &-\frac{\mathfrak{M}}{r^2}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\theta\cos 2\theta\cos(\varphi-\Omega t)\,, \\ h^{\| \text{out}} &= \frac{\mathfrak{M}}{2}\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \cos\theta + \frac{\mathfrak{M}}{r^2}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \cos\theta\sin^2\theta\,. \end{aligned} \tag{39}$$

В итоге внутри шара магнитное поле второго порядка запишется в виде

$$\begin{aligned} B_r^{\perp \text{in}2} &= \frac{\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \sin\theta\left(2\sin^2\theta-\frac{9}{5}\right)\cos(\varphi-\Omega t)\,, \\ B_\theta^{\perp \text{in}2} &= \frac{\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \cos\theta\left(2\sin^2\theta-\frac{3}{5}\right)\cos(\varphi-\Omega t)\,, \\ B_\varphi^{\perp \text{in}2} &= \frac{3}{5}\,\frac{\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \sin(\varphi-\Omega t)\,, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} B_r^{\| \text{in}2} &= \frac{2\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \sin^2\theta\cos\theta\,, \\ B_\theta^{\| \text{in}2} &= -\frac{2\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2 \sin^3\theta\,, \quad B_\varphi^{\| \text{in}2} = 0\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Соответственно, вне шара получаем

$$\begin{aligned} B_r^{\perp \text{out}2} &= \frac{\mathfrak{M}}{r}\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \sin\theta\cos(\varphi-\Omega t)+ \\ &+\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\theta\left(4\sin^2\theta-\frac{13}{5}\right)\cos(\varphi-\Omega t)\,, \\ B_\theta^{\perp \text{out}2} &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{M}}{r}\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \cos\theta\cos(\varphi-\Omega t)+ \\ &+\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \cos\theta\left(-6\sin^2\theta+\frac{4}{5}\right)\cos(\varphi-\Omega t)\,, \\ B_\varphi^{\perp \text{out}2} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{M}}{r}\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 \sin(\varphi-\Omega t)+ \\ &+\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \left(\sin^2\theta-\frac{4}{5}\right)\sin(\varphi-\Omega t)\,, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} B_r^{\| \text{out}2} &= \frac{4}{5}\,\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \cos\theta\,, \\ B_\theta^{\| \text{out}2} &= \frac{2}{5}\,\frac{\mathfrak{M}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\theta\,, \quad B_\varphi^{\| \text{out}2} = 0\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Как легко убедиться, первые слагаемые в ортогональной компоненте (42) в точности совпадают с полями вращающегося магнитного диполя, пропорциональными r^{-1}; чтобы показать это, нужно вновь разложить экспоненту в соотношениях (12)–(14). Вторые слагаемые соответствуют радиационным полям квадрупольного излучения. Как мы видим, используемый нами метод действительно позволяет в точности воспроизвести известные результаты до второго порядка малости. Что касается параллельной компоненты (43), то магнитное поле второго порядка представляет собой просто поле магнитного диполя, величина которого в $(2/5)\,\varepsilon^2$ меньше величины магнитного диполя шара $\mathfrak{M}$. Это поле создаётся кольцевым током коротации $\mathbf{j} = \rho_{\text{e}}\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$.

Выписанные выше выражения, однако, ещё не дают решений поставленной задачи[4]. Дело в том, что потенциалы $h^{(2)}$ определены с точностью до свободных гармонических функций, являющихся решением уравнения Лапласа,

$$h^{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_l^m\, r^l\, Y_l^m(\theta,\varphi)\,, \tag{44}$$

$$h^{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_l^m\, r^{-l-1}\, Y_l^m(\theta,\varphi)\,, \tag{45}$$

где $Y_l^m(\theta,\varphi)$ — сферические функции. Естественно, внутри шара опять были выбраны лишь возрастающие с увеличением r решения, а вне шара — убывающие. Этот случай, как мы видим, отличается от случая электрического поля первого порядка, поскольку для потенциала ψ внутри шара было выполнено условие $\psi = 0$. Непрерывность тангенциальной компоненты приводила к тому, что дополнительные гармонические поля отсутствовали и при $r > R$.

Поскольку, как легко проверить, в потенциал $h^{(2)}$ должны входить только те сферические функции, которые соответствуют угловому распределению объёмных зарядов и токов, в результате для ортогональной компоненты имеем

$$\begin{aligned} h^{\perp \text{in}} &= a^{\perp \text{in}}\,\frac{\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 r\,\hat{Y}_1^1(\theta,\varphi)+ \\ &+b^{\perp \text{in}}\,\frac{\mathfrak{M}}{R^5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 r^3\,\hat{Y}_3^1(\theta,\varphi)\,, \\ h^{\perp \text{out}} &= a^{\perp \text{out}}\,\frac{\mathfrak{M}}{r^2}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \hat{Y}_1^1(\theta,\varphi)+ \\ &+b^{\perp \text{out}}\,\frac{\mathfrak{M}R^2}{r^4}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \hat{Y}_3^1(\theta,\varphi)\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Соответственно, для осесимметричной компоненты получаем

$$\begin{aligned} h^{\| \text{in}} &= a^{\| \text{in}}\,\frac{\mathfrak{M}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 r\,\hat{Y}_1^0(\theta,\varphi)+ \\ &+b^{\| \text{in}}\,\frac{\mathfrak{M}}{R^5}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 r^3\,\hat{Y}_3^0(\theta,\varphi)\,, \\ h^{\| \text{out}} &= a^{\| \text{out}}\,\frac{\mathfrak{M}}{r^2}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \hat{Y}_1^0(\theta,\varphi)+ \\ &+b^{\| \text{out}}\,\frac{\mathfrak{M}R^2}{r^4}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \hat{Y}_3^0(\theta,\varphi)\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь для простоты мы будем использовать "ненормированные" сферические функции:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1^0(\theta,\varphi) &= \cos\theta\,, \\ \hat{Y}_3^0(\theta,\varphi) &= 5\cos^3\theta - 3\cos\theta\,, \\ \hat{Y}_1^1(\theta,\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi\,, \\ \hat{Y}_3^1(\theta,\varphi) &= (5\sin^3\theta - 4\sin\theta)\,\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению восьми коэффициентов (a и b с различными индексами), которые

[4] Это видно хотя бы из того, что для них не выполнено условие непрерывности нормальной компоненты на поверхности шара.

следует определять из условия непрерывности нормальной компоненты магнитного поля на поверхности шара. Отсюда получаем следующие соотношения между коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
& a^{\perp \mathrm{in}} = -2a^{\perp \mathrm{out}} + \frac{9}{5}\,, \quad b^{\perp \mathrm{in}} = -\frac{4}{3}\, b^{\perp \mathrm{out}} + \frac{2}{15}\,, \\
& a^{\parallel \mathrm{in}} = -2a^{\parallel \mathrm{out}}\,, \quad b^{\parallel \mathrm{in}} = -\frac{4}{3}\, b^{\parallel \mathrm{out}} + \frac{2}{15}\,.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Однако, как мы видим, соотношений (49) недостаточно, чтобы определить все восемь неизвестных коэффициентов. Действительно, к рассматриваемым в этом порядке полям, возникающим в результате вращения шара, можно добавить поля, формально имеющие порядок малости ε^2, но не связанные собственно с вращением. Такие поля могут возникать за счёт дополнительных, не обусловленных вращением шара поверхностных токов, которые в ε^2 раз меньше, чем поверхностные токи, создающие магнитное поле нулевого приближения.

Дополнительные поля, возникающие за счёт потенциалов (46), (47), также будут вносить вклад в аномальный момент, и мы не имеем права отбросить их в полном решении. Однако замечательный факт состоит в том, что сама величина аномального момента не зависит от выбора свободных коэффициентов.

Действительно, в качестве таких четырёх свободных коэффициентов можно выбрать величины $(a,b)^{\perp \mathrm{out}}$ и $(a,b)^{\parallel \mathrm{out}}$, описывающие гармонические поля за пределами шара. Как можно показать прямым интегрированием соответствующих компонент в общем выражении (9), аномальный момент действительно не зависит от $(a,b)^{\perp \mathrm{in}}$ и $(a,b)^{\parallel \mathrm{out}}$ благодаря соотношениям (49). Так и должно быть, поскольку если бы их вклад не был равен нулю, то не равнялся бы нулю и вклад нулевого порядка $[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}^{(0)}\}]_{y'} B_r^{(0)}$, который тоже связан со свободными полями, описываемыми гармоническими функциями. С другой стороны, как видно из соотношений (49), если все величины $(a,b)^{\perp \mathrm{out}}$ и $(a,b)^{\parallel \mathrm{out}}$ положить равными нулю, то некоторые из коэффициентов $(a,b)^{\perp \mathrm{in}}$ и $(a,b)^{\parallel \mathrm{in}}$ окажутся ненулевыми и поэтому также внесут вклад в $K_{y'}$.

Для однозначного определения решения мы вновь будем считать, что поверхностные токи второго порядка обусловлены только вращением поверхностного заряда σ_{e}:

$$
I_\varphi = \sigma_{\mathrm{e}} \Omega R \sin\theta\,,
\tag{50}
$$

$$
I_\theta = 0\,.
\tag{51}
$$

Условия (50), (51) и дают дополнительные соотношения, необходимые для полного определения коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
& a^{\perp \mathrm{out}} = \frac{7}{30}\,, \quad a^{\perp \mathrm{in}} = \frac{4}{3}\,, \quad b^{\perp \mathrm{out}} = \frac{1}{7}\,, \quad b^{\perp \mathrm{in}} = -\frac{2}{35}\,, \\
& a^{\parallel \mathrm{out}} = 0\,, \quad a^{\parallel \mathrm{in}} = 0\,, \quad b^{\parallel \mathrm{out}} = \frac{1}{7}\,, \quad b^{\parallel \mathrm{in}} = -\frac{2}{35}\,.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Здесь важно подчеркнуть, что решение Дойча [3] соответствует несколько иной постановке задачи. Дело в том, что в [3] предполагалось, что нормальная компонента магнитного поля на поверхности шара вообще не содержит поправок порядка ε^2. Как легко проверить, этому решению соответствует следующий выбор констант:

$$
a^{\perp \mathrm{out}} = -\frac{4}{5}\,, \quad b^{\perp \mathrm{out}} = \frac{1}{5}\,, \quad a^{\parallel \mathrm{out}} = \frac{2}{5}\,, \quad b^{\parallel \mathrm{out}} = 0\,,
\tag{53}
$$

для которых

$$
a^{\perp \mathrm{in}} = \frac{1}{5}\,, \quad b^{\perp \mathrm{in}} = -\frac{2}{15}\,, \quad a^{\parallel \mathrm{in}} = -\frac{4}{5}\,, \quad b^{\parallel \mathrm{in}} = \frac{2}{15}\,.
\tag{54}
$$

Таким образом, в нашей постановке решение Дойча есть решение для вращающегося диполя со специально подобранными дополнительными источниками небольших дипольных и октупольных полей, таких, чтобы при вращении они полностью компенсировали магнитное поле порядка ε^2 на поверхности шара. Сама величина аномального момента, как показано выше, от этого выбора не зависит.

Перейдём теперь собственно к вычислению аномального момента (9), который мы представим в виде

$$
\begin{aligned}
K_{y'} = \frac{R^3}{4\pi} \int \Big(& \big[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}^{(2)}\}\big]_{y'} B_r^{(0)} + \big[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}^{(0)}\}\big]_{y'} B_r^{(2)} + \\
& + \big[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{(1)}\big]_{y'} \{E_r^{(1)}\} \Big)\, \mathrm{d}o\,.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Впрочем, формула (55) может быть упрощена. Действительно, учитывая, что поверхностный ток второго порядка $I_\varphi = \sigma_{\mathrm{e}} \Omega R \sin\theta$ определяется лишь поверхностным зарядом, связанным со скачком электрического поля первого порядка, находим

$$
\begin{aligned}
& \big\{B_\theta^{(2)}\big\} = \frac{\Omega R}{c} \sin\theta \big\{E_r^{(1)}\big\}\,, \\
& \big\{B_\varphi^{(2)}\big\} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Поскольку, согласно (21), мы также можем записать

$$
E_\theta^{(1)} = -\frac{\Omega R}{c} \sin\theta B_r^{(0)}
\tag{57}
$$

(эта компонента непрерывна на поверхности шара, и поэтому здесь можно положить $\psi = 0$), первое и третье слагаемое в (55), как легко проверить, взаимно уничтожаются, и в итоге мы имеем

$$
K_{y'} = \frac{R^3}{4\pi} \int \big[\mathbf{n} \times \{\mathbf{B}^{(0)}\}\big]_{y'} B_r^{(2)}\, \mathrm{d}o\,.
\tag{58}
$$

Это означает, что при отсутствии поверхностных токов нулевого порядка аномальный момент будет равен нулю.

Проведя теперь элементарное интегрирование, для полного аномального момента получим

$$
K_{y'} = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\chi \cos\chi\,.
\tag{59}
$$

При этом вклад в аномальный момент, связанный с поверхностными токами, равен

$$
K_{y'}^B = \frac{\mathfrak{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\chi \cos\chi\,,
\tag{60}
$$

а вклад электрического поля (т.е. момент, связанный с поверхностными зарядами) выражается как

$$
K_{y'}^E = -\frac{2}{3} \frac{\mathfrak{m}^2}{R^3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 \sin\chi \cos\chi\,.
\tag{61}
$$

В качестве второго примера рассмотрим вращающуюся полую сферу. Иными словами, будем считать, что заряды и токи, в том числе те, которые создают магнитное поле нулевого приближения, сосредоточены лишь в сферической оболочке $r = R$. Оказывается, эта задача не требует изменения полей, найденных нами для ортогонального диполя. Действительно, как отмечалось, плотность Гольдрайха – Джулиана (30) для однородного "горизонтального" магнитного поля внутри сферы равна нулю. Поэтому при $r < R$ мы по-прежнему можем положить $\psi^{\perp} = 0$.

Что касается осесимметричной компоненты, то для выполнения условия $\rho_{\mathrm{e}} = 0$ внутри сферы к полученному решению необходимо добавить потенциал

$$\delta\psi^{\parallel} = -\frac{2}{3}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\,\frac{\Omega r^2}{c}\,. \tag{62}$$

В результате внутри сферы дополнительно возникает лишь радиальное электрическое поле:

$$\delta E_r^{\parallel} = \frac{4}{3}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\,\frac{\Omega r}{c}\,, \tag{63}$$

тогда как электрическое поле вне шара вообще не изменяется. При этом скачок электрического поля на поверхности выражается как

$$\{E_r^{\parallel}\} = \frac{5}{3}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\,\frac{\Omega R}{c}\,(1 - 3\cos^2\theta)\,. \tag{64}$$

Как мы видим, в этом случае полный заряд оболочки оказывается равным нулю.

Что касается магнитного поля второго порядка, то, как легко проверить, дополнительное электрическое поле (63) приводит к появлению дополнительного потенциала

$$\delta h^{\parallel} = \frac{4}{15}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\,\frac{\Omega^2}{c^2}\,r^3\cos\theta\,. \tag{65}$$

В результате дополнительное магнитное поле внутри сферы с учётом свободных полей примет вид

$$\begin{aligned}
\delta B_r^{\parallel\mathrm{in}2} &= -\frac{4}{5}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2\cos\theta + a\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\cos\theta\,,\\
\delta B_\theta^{\parallel\mathrm{in}2} &= \frac{8}{5}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega r}{c}\right)^2\sin\theta - a\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\sin\theta\,,\\
\delta B_\varphi^{\parallel\mathrm{in}2} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{66}$$

Соответственно, вне сферы получаем

$$\begin{aligned}
\delta B_r^{\parallel\mathrm{out}2} &= -\left(\frac{4}{5} + 2a'\right)\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\cos\theta\,,\\
\delta B_\theta^{\parallel\mathrm{out}2} &= -\left(\frac{2}{5} + a'\right)\frac{\mathfrak{m}}{r^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\sin\theta\,,\\
\delta B_\varphi^{\parallel\mathrm{out}2} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{67}$$

Условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля и условие коротации дают

$$a = -\frac{2}{9}\,, \quad a' = \frac{4}{9}\,. \tag{68}$$

Таким образом, для полного аномального момента окончательно получаем

$$K_{y'} = \frac{31}{45}\,\frac{\mathfrak{m}^2}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\sin\chi\cos\chi\,. \tag{69}$$

Подобным методом может быть решена также задача, в которой однородное магнитное поле нулевого приближения по параметру ε занимает лишь внутренний шар радиусом R_{in}. Для промежуточной области $R_{\mathrm{in}} < r < R$ (где, как и при $r < R_{\mathrm{in}}$, потенциал ψ равен нулю), так же как и для области за пределами шара, мы будем предполагать, что магнитное поле нулевого порядка является полем точечного диполя. Тогда для гармонических функций нам понадобятся уже 16 коэффициентов, поскольку в области $R_{\mathrm{in}} < r < R$ могут существовать как возрастающие, так и убывающие решения. В итоге получаем

$$K_{y'} = \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\,\frac{R}{R_{\mathrm{in}}}\right)\frac{\mathfrak{m}^2}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2\sin\chi\cos\chi\,. \tag{70}$$

Как мы видим, при $R_{\mathrm{in}} = R$ мы возвращаемся к старому значению $\xi = 1/3$.

4. Обсуждение результатов

Итак, мы показали, что аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме, в общем случае не равен нулю и его величина зависит от структуры внутреннего электромагнитного поля. В частности, мы должны признать расходимость аномального момента при стремлении R_{in} к нулю; впрочем, физически такая ситуация, естественно, реализоваться не может.

Обсудим прежде всего результаты, которые были получены в предыдущих работах. К сожалению, в работах [4, 12] приведён лишь окончательный результат $\xi = 1$, совпадающий, однако, с тормозящим моментом (60), обусловленным лишь поверхностными токами. Не исключено, что в этих работах просто не был учтён вклад электрической компоненты (61). Далее, отметим, что нет прямого противоречия и с результатом работы [16], в которой предполагалось, что магнитное поле внутри шара — это поле точечного диполя; тогда, как видно из соотношения (58), вклад в аномальный момент от поверхности шара (а только эта величина и определялась в [16]) должен быть равен нулю. В других работах, как мы покажем ниже, обсуждалась совсем другая величина, не имеющая смысла тормозящего момента сил.

Действительно, практически во всех указанных работах аномальный момент вычислялся как поток ($K_i = -\int \varepsilon_{ijk} r_j T_{kl}\,\mathrm{d}S_l$) момента тензора натяжений электромагнитного поля T_{kl} по формуле

$$\mathbf{K}^M = \frac{1}{4\pi}\int_S \Big(\mathbf{r}\times\mathbf{B}(\mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}) + \mathbf{r}\times\mathbf{E}(\mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}) - \frac{1}{2}\,(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\,\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{S}\Big)\,. \tag{71}$$

При интегрировании по сфере (когда $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$ и $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}R^2\,\mathrm{d}o$, где, как и прежде, $\mathrm{d}o$ — элемент телесного угла) получаем

$$\mathbf{K}_{y'}^M = \frac{R^3}{4\pi}\int\big\{[\mathbf{n}\times\mathbf{B}]_{y'}(\mathbf{B}\mathbf{n}) + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]_{y'}(\mathbf{E}\mathbf{n})\big\}\,\mathrm{d}o\,. \tag{72}$$

Формула (72) отличается от (9) тем, что в (72) отсутствуют скачки электрического и магнитного полей на поверхности шара. Если мы подставим в (72) найденные выше поля вне шара, то при $r = R + 0$ получим

$$\xi = \frac{3}{5}, \tag{73}$$

т.е. результат работы [14] для решения Дойча. При этом очень важно, что величина $\xi = 3/5$ также не зависит от выбора свободных коэффициентов.

Однако надо иметь в виду, что соотношение (72), которое действительно можно найти во многих учебниках, в *Электродинамике сплошных сред* Ландау и Лифшица [21] снабжено важным комментарием. Этой формулой можно пользоваться лишь в том случае, если рассматриваемый объём "не заключает в себе заряженных тел, являющихся источниками поля". Следовательно, формулой (72) можно воспользоваться лишь тогда, когда поток тензора натяжений электромагнитного поля внутри тела равен нулю. Однако вращающийся шар, в котором наводятся индукционные заряды и токи, этому условию, как мы сейчас покажем, не удовлетворяет.

Действительно, поток вектора углового момента электромагнитного поля связан с угловым моментом сил, действующих на вещество, согласно закону сохранения углового момента электромагнитного поля [22],

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}_{\mathrm{field}}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{K}^M + \int \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{74}$$

Здесь $\mathbf{L}_{\mathrm{field}}$ — момент импульса электромагнитного поля в объёме V,

$$\mathbf{L}_{\mathrm{field}} = \int \frac{\mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi c}\,\mathrm{d}V\,, \tag{75}$$

$\mathbf{K}^M$ — поток углового момента импульса поля (72) через поверхность, ограничивающую этот объём, а $\mathbf{F} = \rho_{\mathrm{e}}\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ — сила Лоренца. Последнее слагаемое в уравнении (74) играет роль источника или стока, а значит, отвечает за передачу углового момента от электромагнитного поля веществу:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,\mathrm{d}V. \tag{76}$$

Именно это слагаемое имеет смысл углового момента сил, а не $\mathbf{K}^M$, как предполагалось в работах [14, 17].

Действительно, рассмотрим сферу радиусом $r < R$ с центром, совпадающим с центром шара. Воспользовавшись теперь явным видом магнитного поля нулевого порядка и электрического поля первого порядка, нетрудно проверить, что для однородно намагниченного шара зависящая от времени компонента момента импульса поля $\mathbf{L}_{\mathrm{field}}$ (75) имеет вид

$$\mathbf{L}_{\mathrm{field}} = \frac{4}{15}\,\frac{\mathfrak{M}^2}{R^6}\left(\frac{\Omega r^5}{c^2}\right)\sin\chi\cos\chi\,\mathbf{e}_{x'}\,. \tag{77}$$

С увеличением радиуса r величина $\mathbf{L}_{\mathrm{field}}$ будет непрерывно возрастать, а значит, будет возрастать и связанный с вращением этого вектора поток углового момента $\mathbf{K}^M$, который также будет изменяться непрерывно, испытывая разрыв только на границе шара $r = R$. Поскольку $\dot{\mathbf{e}}_{x'} = \Omega\,\mathbf{e}_{y'}$, производная по времени $\dot{\mathbf{L}}_{\mathrm{field}} = \Omega L_{\mathrm{field}}\mathbf{e}_{y'}$ будет в точности соответствовать потоку углового момента $\mathbf{K}^M$, вычисленному по внутренней поверхности шара $r = R - 0$ $(4/15 = 3/5 - 1/3)$.

Таким образом, мы приходим к важному выводу: при учёте баланса сил во втором порядке по параметру ε необходимо учитывать момент импульса электромагнитного поля. Поэтому часть напряжений, связанная с электромагнитным полем, должна воздействовать на момент импульса самого поля, и только остальная его часть — оказать влияние на взаимодействие с вращающимся телом. Согласно уравнению (74) это означает, что для углового момента сил, действующих на шар, необходимо использовать выражение

$$\mathbf{K} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{mat}}}{\mathrm{d}t} = \{\mathbf{K}^M\}\,. \tag{78}$$

Кстати, теперь становится понятной и расходимость $\sim R_{\mathrm{in}}^{-1}$, возникшая в выражении (70). Действительно, прямой расчёт полного момента импульса электромагнитного поля внутри шара этом случае даёт

$$\mathbf{L}_{\mathrm{field}} = \frac{\mathfrak{M}^2\Omega}{c^2 R}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{5}\,\frac{R}{R_{\mathrm{in}}}\right)\sin\chi\cos\chi\,\mathbf{e}_{x'}\,. \tag{79}$$

Как мы видим, момент импульса поля, заключённый внутри шара радиусом R, при данной величине $\mathfrak{M}$ расходится именно как $1/(5R_{\mathrm{in}})$. Поэтому масштаб сил, действующих на вращающийся шар, должен иметь ту же величину, но только с противоположным знаком.

В заключение подчеркнём, что предлагаемый здесь метод неприменим для расчёта ответственного за магнитодипольное излучение момента сил, который, как видно из соотношения (1), должен иметь третий порядок малости по параметру ε. Поэтому для его определения должно быть известно магнитное поле $B^{(3)}$ в третьем порядке по параметру ε (электрическое поле вследствие условия (37) не даёт вклада третьего порядка). Эти поля, входя в произведения соответственно с $B^{(0)}$, и должны привести к необходимому значению $\mathbf{K}$ (1).

Однако, как легко проверить, магнитное поле третьего порядка $B^{(3)}$ есть просто однородное поле, величина которого в рамках нашей процедуры не может быть определена [11][5]. К счастью, эта неопределённость появляется лишь на следующем шаге разложения, поскольку, как мы видели, аномальный момент (9) в $(\Omega R/c)^{-1}$ раз больше тормозящего момента, направленного против оси вращения. Поэтому описанная выше процедура оказывается адекватной поставленной задаче.

С другой стороны, если взять однородное магнитное поле третьего порядка из явных выражений для вращающегося точечного диполя (12)–(14)

$$\mathbf{B}^{(3)} = -\frac{2}{3}\,\frac{\mathfrak{m}}{R^3}\left(\frac{\Omega R}{c}\right)^3\mathbf{e}_{y'}\,, \tag{80}$$

то прямое вычисление потока момента импульса электромагнитного поля $\mathbf{K}^M$ при $r = R - 0$ даёт $K_{x'} = 0$ и $K_{z'} = 0$. С другой стороны, при $r = R + 0$ мы возвращаемся, естественно, к выражениям (1) и (3). Это означает, что в третьем порядке по параметру ε момент

[5] По-видимому, это связано с тем, что рассматриваемый здесь метод расчёта не может различить запаздывающие и опережающие потенциалы [19].

импульса электромагнитного поля внутри шара равен нулю. Следовательно, в этом порядке момент сил, действующий на вращающийся шар, действительно можно определять через поверхностный интеграл, не содержащий скачков полей. С другой стороны, как показывают численные расчёты [23], при $r > R$ поток $K_{x'}$ зависит от радиуса интегрирования r. Значит, вне шара момент импульса электромагнитного поля третьего порядка также не равен нулю.

5. Заключение

Таким образом, аномальный момент сил $K_{y'}$, действующий на вращающийся намагниченный шар, в общем случае действительно не равен нулю. Однако $K_{y'}$ зависит от внутренней структуры полей. Это связано с тем, что во втором порядке по параметру ε в балансе сил необходимо учитывать момент импульса электромагнитного поля в объёме шара $\mathbf{L}_{\text{field}}$ (75), который в свою очередь зависит от структуры внутреннего электрического поля. Различие результатов в трёх рассмотренных в разделе 4 примерах как раз и связано с тем, что при одинаковой нормальной компоненте магнитного поля $B_r^{(0)}$ на поверхности шара внутренняя структура электрического поля у них различна. В результате различными оказывались и моменты импульса электромагнитного поля. Однако в третьем порядке по ε момент импульса электромагнитного поля внутри шара равен нулю. Поэтому при вычислении моментов сил $K_{x'}$ и $K_{z'}$ можно воспользоваться величиной потока углового момента K_i^M (71), не содержащей скачков полей на поверхности шара.

Наконец, вслед за Архимедом, можно воскликнуть "эврика"! Действительно, измерение аномального момента сил, действующего на вращающийся шар, позволяет определить его внутреннюю структуру, которая никак не проявляет себя во внешних областях. Как показано в настоящей статье, электромагнитные поля вне полого и сплошного шара должны быть одинаковыми, тогда как действующие на шар моменты сил различаются более чем в два раза. Впрочем, это не первый подобный пример в электродинамике. Например, если тело обладает так называемым анапольным моментом [6]

$$\mathbf{T} = \frac{1}{10c} \int \left((\mathbf{jr})\,\mathbf{r} - 2r^2\mathbf{j} \right) \mathrm{d}V\,, \tag{81}$$

то при отсутствии вращения электромагнитные поля вне тела будут в точности равны нулю. Однако в неоднородном магнитном поле на тело будет действовать момент сил $\mathbf{K} = \mathbf{T} \times [\nabla \times \mathbf{B}]$, а вращение тела будет сопровождаться электромагнитным излучением [24]. Учёт момента импульса поля оказывается совершенно необходимым и в некоторых других случаях (см., например, [25, 26] и указанную там литературу).

Авторы благодарят Д.П. Барсукова, Я.Н. Истомина, Д.Н. Собьянина, А.А. Филиппова и А.Д. Чеховского за плодотворные дискуссии, а также А.К. Обухову и Е.Е. Стройнова за помощь в проведении вычислений. Работа поддержана грантом РФФИ 14-02-00831.

[6] Моделью анаполя может служить имеющий форму тора соленоид, по обмотке которого течёт полоидальный ток I.

Список литературы

1. Pacini F *Nature* **216** 567 (1967)
2. Ostriker J P, Gunn J E *Astrophys. J.* **157** 1395 (1969)
3. Deutsch A J *Ann. d'Astrophys.* **18** 1 (1955)
4. Davis L, Goldstein M *Astrophys. J. Lett.* **159** L81 (1970)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973); Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
6. Бескин В С, Гуревич А В, Истомин Я Н *ЖЭТФ* **85** 401 (1983); Beskin V S, Gurevich A V, Istomin Ya N *Sov. Phys. JETP* **58** 235 (1983)
7. Mestel L, Panagi P, Shibata S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **309** 388 (1999)
8. Spitkovsky A *Astrophys. J.* **648** L51 (2006)
9. Бескин В С, Истомин Я Н, Филиппов А А *УФН* **183** 179 (2013); Beskin V S, Istomin Ya N, Philippov A A *Phys. Usp.* **56** 164 (2013)
10. Michel F C *Theory of Neutron Star Magnetospheres* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1991)
11. Beskin V S, Gurevich A V, Istomin Ya N *Physics of the Pulsar Magnetosphere* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
12. Goldreich P *Astrophys. J.* **160** L11 (1970)
13. Good M L, Ng K K *Astrophys. J.* **299** 706 (1985)
14. Melatos A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **313** 217 (2000)
15. Mestel L, Moss D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **361** 595 (2005)
16. Istomin Ya N, in *Progress in Neutron Star Research* (Ed. A P Wass) (New York: Nova Science Publ., 2005) p. 27
17. Barsukov D P, Tsygan A I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **409** 1077 (2010)
18. Biryukov A, Beskin G, Karpov S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **420** 103 (2012)
19. Beskin V S *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects: Accretion, Winds and Jets* (Heidelberg: Springer, 2010)
20. Goldreich P, Julian W H *Astrophys. J.* **157** 869 (1969)
21. Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
22. Schwinger J et al. *Classical Electrodynamics* (Boulder, CO: Westview Press, 1998)
23. Philippov A, Tchekhovskoy A, Li J G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **441** 1879 (2014); arXiv:1311.1513
24. Dubovik V M, Tugushev V V *Phys. Rep.* **187** 145 (1990)
25. Соколов И В *УФН* **161** (10) 175 (1991); Sokolov I V *Sov. Phys. Usp.* **34** 925 (1991)
26. Bliokh K Yu, Bliokh Yu P *Phys. Rev. Lett.* **96** 073903 (2006)

On the anomalous torque applied to a rotating magnetized sphere in a vacuum

V.S. Beskin, A.A. Zheltoukhov
Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation; Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, 141700 Moscow region, Russian Federation
E-mail: *beskin@lpi.ru, zhelto@gmail.com*

We analyze the torque applied to a rotating magnetized sphere in a vacuum. It is shown that for the correct determination of one of the torque's component the angular momentum of the electromagnetic field within the body should be taken into account.

PACS numbers: 03.50.De, **41.20.–q**, 97.60.Gb
Bibliography — 26 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **184** (8) 865–873 (2014)
DOI: 10.3367/UFNr.0184.201408e.0865
Received 2 December 2013, revised 15 December 2013
Physics – Uspekhi **57** (8) (2014)