

УДК

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.С.Бескин^{1,2}, А.Ю.Истомин^{2,1}, Ф.А.Князев^{2,1}, Т.И.Халилов^{2,1}.

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Москва¹

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный²

Ключевые слова: синхротронное излучение, магнитные поля, активные ядра галактик

Аннотация

Обсуждается искажение спектра синхротронного излучения, принимаемого удаленным наблюдателем, связанное с неоднородностью магнитного поля. Показано, что в случае излучения одной частицы заметное отличие интегрального спектра от случая однородного магнитного поля имеет место лишь для времен наблюдений, значительно превышающих времена выхода наблюдателя из диаграммы направленности, и лишь только для субрелятивистских частиц, когда за время наблюдения излучение приходит из областей с существенно различным магнитным полем. При меньших временах наблюдения неоднородность поля приводит лишь к мелкомасштабным (меньшим или сравнимым по частоте с основной гирочастотой ω_B) искажениям, никак не проявляя себя в интегральном спектре. Для случая же ансамбля частиц, интересного для астрофизических приложений, отличие в интегральном спектре становится пренебрежимо малым.

* Электронный адрес <beskin@lpi.ru>

Содержание

1	Предисловие	2
2	Введение	3
3	Мелкомасштабные искажения	7
4	Искажение интегрального спектра	12
5	Синхротронное излучение ансамбля частиц	15
6	Приложение. Траектория частицы в случае монополярного магнитного поля	18

1 Предисловие

Вспоминая Сергея Ивановича Сыроватского в год его столетнего юбилея (а один из авторов этой заметки был последним студентом С.И. на кафедре проблем физики и астрофизики МФТИ в начале 70-х годов), нельзя не удивиться той долгой памяти, которую он о себе оставил. Сергей Иванович ушел из жизни почти пятьдесят лет назад, но все эти годы постоянно проводились семинары, конференции, сессии Отделения физики и астрономии РАН, посвященные его памяти [1, 2, 3].

И дело здесь, конечно же, не только в его научных достижениях. Безусловно, немалую роль сыграли такие черты его характера, как принципиальность и доброжелательность, которые оказали большое влияние на формирование атмосферы высоких научных и нравственных стандартов, без которых было бы невозможным существование золотого века советской астрофизики. Сергей Иванович всегда отстаивал принципы научной добросовестности и уважения к чужому труду, принципы, которым сам всегда неукоснительно следовал.

Другим важнейшим качеством Сергея Ивановича было обостренное понимание самой сути физического исследования. Обсуждая на семинаре (а у С.И. был собственный еженедельный рабочий семинар по магнитной гидродинамике!) научную статью или работу студентов, Сергей Иванович всегда особенно выделял четкость (или, наоборот,

нечеткость) постановки физической задачи и формулировку граничных условий. Точные решения, хотя и приближенных уравнений, считал С.И. Сыроватский, чрезвычайно важны для формирования нашей интуиции, позволяющей в дальнейшем понимать основные свойства происходящих процессов уже на качественном уровне. Здесь, в частности, проявлялась его принадлежность к школе И.Е. Тамма, утверждавшей, что в основе любой интерпретации наблюдений должна лежать фундаментальная физика. В этом вопросе, кстати, он спорил с Я.Б. Зельдовичем, который считал, что, напротив, необходимо прежде всего сконцентрироваться на анализе приближенных решений точных уравнений.

Все это позволило Сергею Ивановичу работать на самом переднем крае бурно развивавшейся тогда теоретической астрофизики. Ему принадлежат важнейшие результаты по магнитной гидродинамике (классификация разрывов и ударных волн, вопрос об их эволюционности, анализ устойчивости тангенциальных разрывов), радиоастрономии (теория космического синхротронного излучения с учетом неоднородного распределения, диффузии и энергетических потерь электронов), астрофизике космических лучей (вопросы преимущественного ускорения тяжелых ядер и универсальности спектра), физике Солнца. И то, что эта заметка была задумана не в связи с его юбилеем, еще раз показывает, насколько фундаментальную роль сыграли работы Сергея Ивановича Сыроватского в становлении современной астрофизики.

2 Введение

Как уже отмечалось, одной из точек приложения научных интересов С.И. Сыроватского была теория синхротронного излучения — одна из важнейших частей в фундаменте современной физики. В частности, это один из ключевых инструментов астрофизики, позволяющий судить о процессах, происходящих в космической плазме. Здесь можно вспомнить немало открытий, таких, например, как объяснение нетеплового (синхротронного) оптического излучения Крабовидной туманности [4, 5]. Подробное изложение теории синхротронного излучения можно найти в статьях В.Л.Гинзбурга и С.И.Сыроватского [6] и В.Л.Гинзбурга, В.Н.Сазонова и С.И.Сыроватского [7], опубликованных в УФН в 1965-1968 гг (результаты которых позже вошли в обзоры и монографии [8, 9, 10]), а также, например, в книге А.Г. Пахольчика "Радиоастрофизика" [11], вышедшей в русском изда-

нии в 1973 году.

Как известно, теория синхротронного излучения строится в предположении о постоянстве магнитного поля, что для постоянной энергии $m_e c^2 \gamma$ ($\gamma \gg 1$) излучающей частицы приводит к периодическому сигналу $\mathbf{E}(r, t)$ [12]

$$\mathbf{E}(r, t) = \frac{e}{c^2 r} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w}]]}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3}, \quad (1)$$

принимаемого наблюдателем. Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении излучения, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ суть соответственно скорость и ускорение частицы в запаздывающий момент времени $t' = t - r' / c$, где r' есть расстояние от заряженной частицы до наблюдателя. При этом основная частота ω_0 , гармоники которой определяют спектр наблюдаемого излучения, имеет вид

$$\omega_0 = \frac{\omega_B}{1 - \beta_{\parallel} \cos \Theta}, \quad (2)$$

где по определению

$$\omega_B = \frac{eB}{\gamma m_e c} \quad (3)$$

есть релятивистская гирочастота, Θ — угол наблюдения, а $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c = \beta \cos \chi$, где χ — питч-угол излучающей частицы.

В результате благодаря гармоническому движению излучающей частицы по спирали удается достаточно просто разложить электрическое поле $\mathbf{E}(r, t)$ в ряд Фурье [7]

$$\mathbf{E}_n(\Theta, r) = \frac{2e}{cr} \frac{n\omega_B \beta \sin \chi}{(1 - \beta \cos \chi \cos \Theta)^2} \left[\mathbf{l}_1 J'_n(z_n) - i \mathbf{l}_2 \frac{\cos \Theta - \beta \cos \chi}{\beta \sin \chi \sin \Theta} J_n(z_n) \right]. \quad (4)$$

Здесь

$$z_n = n \frac{\beta \sin \chi \sin \Theta}{1 - \beta \cos \chi \cos \Theta}, \quad (5)$$

единичный вектор $\mathbf{l}_2$ направлен вдоль магнитного поля в картинной плоскости, а $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 \times \mathbf{n}$. Соответственно, можно найти и спектральную мощность излучения на данной гармонике в направлении наблюдателя

$$\tilde{p}_n(\Theta, r) = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_n(\Theta, r)|^2. \quad (6)$$

При этом основная энергия излучения будет заключена в высоких гармониках $\omega_n = n \omega_0$ с $n \sim \gamma^3$, так что для усредненного по всем углам Θ спектра, так что после интегрирования по углу наблюдения, максимум спектра соответствует частоте¹

$$\omega_{\max} = 0.44 \omega_B \gamma^3. \quad (7)$$

¹Для дифференциальной плотности энергии $\tilde{p}_n(\Theta, r)$ (6) это не так, см. ниже Рис. 2.

Эта частота, как известно, напрямую связана с характерным временем длительности всплеска излучения τ , регистрируемого наблюдателем ($\omega_{\max} \approx 2\pi/\tau$). Что же касается спектра синхротронного излучения, то для высоких гармоник можно перейти к непрерывному спектру

$$\tilde{p}(\omega, \Theta) = \tilde{p}_n(\Theta) \frac{n}{\omega_n}. \quad (8)$$

В итоге получаются хрестоматийные соотношения, выраженные через функции Макдональда $K(x)$. Например для полной спектральной мощности потерь, т.е. для величины $\mathcal{J}(\omega) = 2\pi r^2 \int \tilde{p}(\omega, \Theta) \sin \Theta d\Theta$ ($dI = \mathcal{J}(\omega) d\omega$), имеем [12]

$$\mathcal{J}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \gamma \omega_B}{c} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi') d\xi', \quad (9)$$

где $\xi = \omega/\omega_c$, а

$$\omega_c = \frac{3}{2} \omega_B \gamma^3. \quad (10)$$

Нельзя сказать, что не предпринимались попытки обобщить соответствующие выражения на случай неоднородного магнитного поля [13, 14, 15, 16]. В частности, в работе [16] исследовалось т.н. джиттеровское излучение (jitter radiation), испускаемое при движении заряженных частиц в случае сильно неоднородного мелкомасштабного магнитного поля. Также большое внимание уделялось т.н. синхро-изгибному излучению [17, 18, 19], когда движение частиц направлено практически вдоль искривленного магнитного поля, а само излучение при этом описывается промежуточным режимом, который в зависимости от локального радиуса кривизны силовых линий, гирорадиуса (радиуса Лармора) и питч-угла переходит в предельные случаи чисто синхротронного или чисто изгибного излучений, соответственно. При этом обычно оценки не выходили за рамки известных синхротронных формул, в которых параметры среды зависели от координат (см., например, [20]). Такой подход, однако, не является последовательным.

Действительно, обратимся к наиболее простой геометрии крупномасштабного неоднородного (а именно монополярного) магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0(R/r)^2 (\mathbf{r}/r)$ и рассмотрим излучающую частицу, ведущий центр которой движется вдоль оси z . В свою очередь, наблюдателя расположим на бесконечности под углом Θ к этой оси. В этом случае, для которого уравнения движения могут быть легко проинтегрированы (см. Приложение) и, значит, определен временной ход электрического поля $\mathbf{E}(t)$ (1), основная частота (2),

определяющая спектр наблюдаемого излучения, в приближении $v = c$ приобретает вид

$$\omega_0^* = \frac{\omega_B R^2}{r^2(1 - \beta \cos \chi \cos \Theta)}, \quad (11)$$

где вновь χ есть питч-угол излучающей частицы, а R — расстояние на котором определяется частота $\omega_B = eB(R)/\gamma m_e c$ (при этом необходимо, чтобы гирорадиус частицы был много меньше всех рассматриваемых расстояний). Новым важнейшим элементом становится то, что благодаря сохранению поперечного адиабатического инварианта $p_\perp^2/B$ угол χ будет изменяться со временем, сохраняя, однако, произведение

$$r \sin \chi = \text{const}. \quad (12)$$

В результате, как видно из соотношения (11), принимаемый сигнал перестает быть периодическим — расстояние между пиками излучения, как показано на Рис. 1, постепенно увеличивается. Здесь необходимо специально подчеркнуть, что речь идет именно о сигнале, принимаемом наблюдателем, находящимся на бесконечно большом расстоянии под углом Θ к оси z . Если же иметь в виду частоту излучения вдоль направления $\Theta = \chi$, то эта частота благодаря соотношению (12) в пределе $v \rightarrow c$ оказалась бы постоянной. Фактически, именно такая постановка и рассматривалась в монографии [10], в которой многие формулы (в том числе и выражение для $\mathbf{E}_n$) выписаны уже после замены $\Theta = \chi$ и $v = c$.

Далее, даже вынося за скобки изменение основной частоты, мы видим, что изменение питч-угла относительно угла наблюдения приводит еще к двум эффектам, а именно к изменению амплитуды и длительности всплесков. Понятно, что максимум амплитуды и минимум длительности всплесков τ_n достигается как раз в тот момент, когда $\chi = \Theta$. При этом при уменьшении амплитуды всплеска увеличивается и его длительность.

Наконец, в отличие от стандартной постановки задачи, когда (отвлекаясь от изменения энергии излучающей частицы) излучение в данном направлении существует бесконечно долго, в нашей задаче, как также хорошо видно на Рис. 1, наблюдатель будет попадать в диаграмму направленности излучающей частицы лишь конечное время t_{tot} . Его легко можно оценить, зная, что излучение происходит в угол $\vartheta \sim 1/\gamma$. Воспользовавшись теперь соотношением $\vartheta \sim \delta r/r$, следующим из (12) и оценкой $t_{\text{tot}} \sim \delta r/c$, получаем окончательно $t_{\text{tot}} \sim r/(\gamma c)$. Это обстоятельство также должно быть принято во внимание.

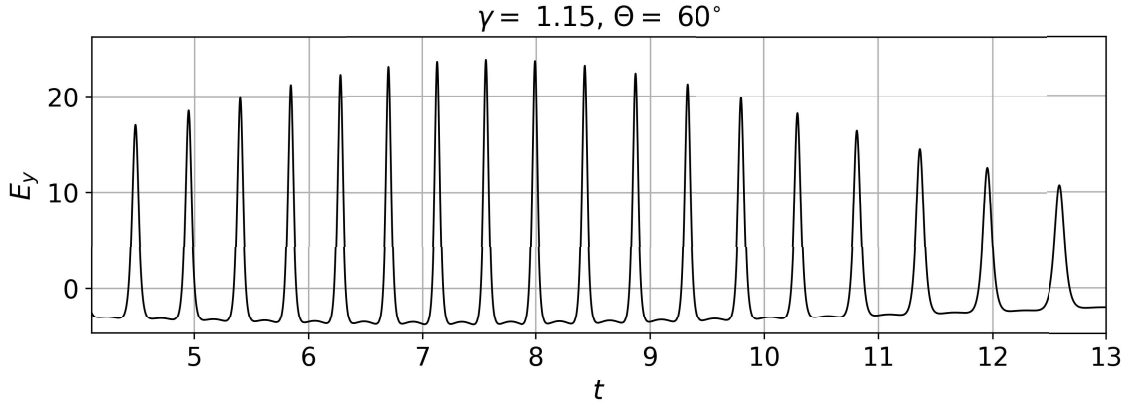


Рис. 1: Электрическое поле $E_y = (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{E}(t))$ (1), измеряемое наблюдателем, находящимся на бесконечности под углом Θ к оси z (в произвольных единицах). Параметры подобраны таким образом, чтобы изменения в ширине и частоте следования импульсов были заметны невооруженным взглядом.

Казалось бы, все перечисленные выше факторы должны были приводить к существенному изменению наблюдаемого спектра синхротронного излучения. Однако, как будет показано ниже, неоднородность поля приводит лишь к мелкомасштабным искажениям, практически никак не проявляя себя в интегральном спектре. Подробному объяснению этого интересного свойства и посвящена настоящая заметка.

3 Мелкомасштабные искажения

Поскольку одной из прикладных задач, приведших к необходимости рассмотреть коррекцию синхротронного излучения, связанную с неоднородностью магнитного поля, был вопрос о природе излучения центральных областей активных галактических ядер, а также истекающих из них релятивистских джетов, приведем здесь сразу несколько оценок, касающихся этого класса объектов. При этом мы будем использовать как параметры телескопа горизонта событий ЕНТ [21] (время накопления сигнала $t_{\text{obs}} = 8$ часов, частота наблюдения $\nu = 345$ ГГц), так и параметры программы MOJAVE [22] (время накопления сигнала $t_{\text{obs}} = 30$ минут, $\nu = 15.3$ ГГц).

Что же касается характерных длин r , то нам в дальнейшем будет удобно нормиро-

вать их на величину т.н. светового цилиндра

$$R_L = \frac{c}{\Omega}, \quad (13)$$

где Ω есть угловая скорость вращения (черной дыры, релятивистского джета). Согласно многочисленным расчетам (см., например, [23]), световой цилиндр должен примерно в десять раз превышать размер черной дыры $r_g = 2GM/c^2$. Для источника M87 соответствующее значение $\Omega \approx 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ (которым мы будем пользоваться в дальнейшем) было получено непосредственно из наблюдений [24] и дает радиус светового цилиндра порядка $R_L \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ см} \approx 10r_g$. В качестве же оценки величины магнитного поля на световом цилиндре B_L можно взять величину $B_L \sim 10^2 \text{ Гс}$, соответствующую различным экстраполяциям наблюдательных данных.

Значения же лоренц-факторов γ излучающих частиц должны быть выбраны из условия соответствия частотам наблюдения. В дальнейшем мы будем полагать $\gamma \sim 10$ – 10^2 для ЕНТ и $\gamma \sim 10^2$ – 10^5 для MOJAVE.

Прежде всего, получаем для полного времени излучения отдельной частицы t_{tot}

$$t_{\text{tot}}^{\text{ЕНТ}} \approx \frac{r}{\gamma c} \approx 300 \left(\frac{r}{10^{14} \text{ см}} \right) \left(\frac{\gamma}{10} \right)^{-1} \text{ с}, \quad (14)$$

$$t_{\text{tot}}^{\text{MOJAVE}} \approx \frac{r}{\gamma c} \approx 300 \left(\frac{r}{10^{16} \text{ см}} \right) \left(\frac{\gamma}{10^3} \right)^{-1} \text{ с}. \quad (15)$$

Как мы видим, для наблюдений вблизи горизонта черной дыры это время заведомо меньше времени наблюдения t_{obs} . Что же касается релятивистских джетов, то время излучения может быть как больше, так и меньше времени t_{obs} . Соответственно, по разному должны вести себя и спектры принимаемого излучения.

Здесь важно отметить, что до сих пор речь шла о синхротронном излучении отдельных частиц. В то же время при рассмотрении релятивистских джетов мы скорее имеем дело с квазистационарным, непрерывным потоком. В таком случае время наблюдения уже перестает определять вид спектра и эквивалентным параметром становится пространственное разрешение телескопа. Действительно, в стационарном приближении именно геометрический размер неразрешаемой телескопом области Δr , определяет участок траекторий частиц, вносящий наибольший вклад в наблюдаемое в точке излучение. Таким образом, время t_{tot} необходимо сравнивать не с t_{obs} , а с величиной $\Delta r/c$. Для данной величины несложно сделать простую оценку. Угловое разрешение современных

РСДБ сетей составляет порядка одной миллисекунды дуги. Взяв для оценки параметры М87 получаем пространственное разрешение $\delta r \approx (10 \div 100) r_g$, что дает $\Delta r/c \approx 10^7$ с, что на много порядков превышает характерные времена t_{tot} . Учитывая, что в силу относительной близости М87 данная оценка является оценкой снизу, получаем, что для релятивистских джетов мы всегда видим излучение со всей траектории частицы. Отметим также, что сейчас мы сознательно вынесли за скобки вопрос влияния нетривиальной функции распределения частиц по питч-углам и энергиям на наблюдаемые спектры. Исследованию этого вопроса будет посвящена часть 5.

Вернемся теперь к интересному с теоретической точки зрения вопросу о спектра излучения отдельной частицы. Конечное время наблюдения $\Delta t = t_{\text{obs}}$ должно приводить к тому, что за счет "соотношения неопределенностей" $\Delta\omega\Delta t \approx 1/2$ даже для однородного магнитного поля линейчатый спектр с частотами $n\omega_0$ ($\omega_0 \approx \omega_B^*$) превратится в набор пиков с характерной относительной частотой уширения каждого пика

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{2t_{\text{obs}}\omega_B} \approx 10^{-9} \left(\frac{\gamma}{10^2}\right) \left(\frac{t_{\text{obs}}}{1 \text{ час}}\right)^{-1} \left(\frac{B}{1 \text{ Гс}}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Как мы видим, во всех обсуждаемых нами случаях такое уширение остается достаточно малым, так что перекрытия пиков не будет иметь место.

С другой стороны, на этом примере мы можем проверить адекватность нашего подхода, поскольку при исследовании искажения спектра синхротронного излучения нам в дальнейшем будет достаточно сравнивать два непрерывных спектра, а не непрерывный спектр в переменном магнитном поле и дискретный спектр в постоянном поле.

На Рис. 2 показаны спектры синхротронного излучения для различных питч-углов χ , близких к углу наблюдения Θ ($\delta\chi \sim 1/\gamma$), полученные с помощью аналитических выражений (4)–(6) для дискретного спектра (точки) и спектра, определенного с помощью прямого Фурье-преобразования сигнала $\mathbf{E}(r, t)$ (1) и последующим интегрированием квадрата его амплитуды по частоте ω вблизи соответствующей гармоники $n\omega_0$. Как мы видим, все эти спектры в точности совпадают друг с другом.

С конечным временем наблюдения t_{obs} связано еще одно важное обстоятельство. Если за это время изменение частоты $\delta\omega$ достаточно мало, так что $\delta\omega t_{\text{obs}} \ll 1$, спектр излучения, полученный в предположении постоянного магнитного поля, не может существенно исказиться. Обсуждаемые ниже изменения будут иметь место лишь в случае обратного неравенства $\delta\omega t_{\text{obs}} > 1$.

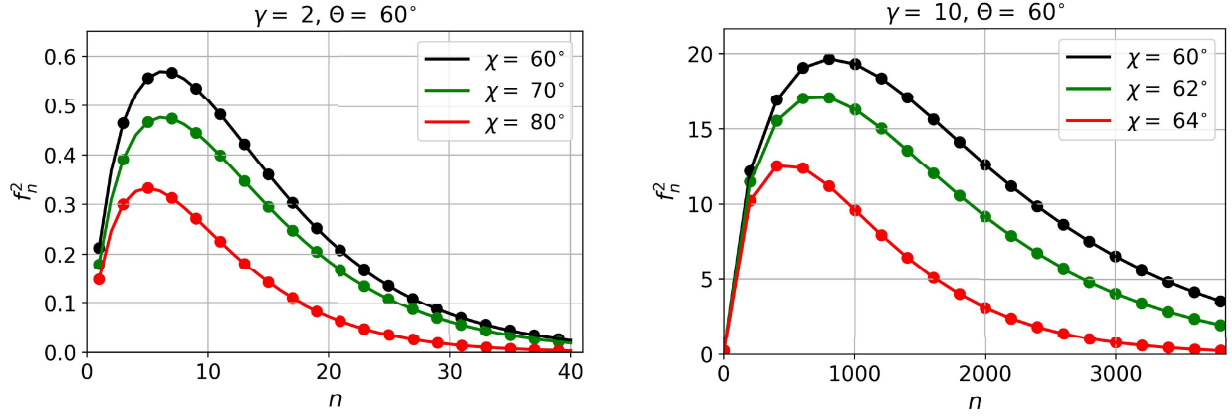


Рис. 2: Сравнение интегральных спектров синхротронного излучения для различныхpitch-углов χ , полученных с помощью аналитических выражений (4)–(6) для дискретного спектра (точки) и спектра, вычисленного с помощью прямого Фурье-преобразования сигнала $\mathbf{E}(r, t)$ (1) сплошные линии) для $\gamma = 2$ (слева) и $\gamma = 10$ (справа).

Оценим теперь величину $\delta\omega t_{\text{obs}}$. Согласно (2) имеем $\delta\omega_0 \approx \omega_0 \delta r / r$, причем $\delta r \approx ct_{\text{obs}}$. В итоге получаем

$$\delta\omega t_{\text{obs}} \approx \frac{\omega_0 c}{r} t_{\text{obs}}^2 \approx 2 \times 10^{13} \left(\frac{r}{10^{16} \text{ см}} \right)^{-1} \left(\frac{\nu}{100 \text{ ГГц}} \right) \left(\frac{t_{\text{obs}}}{1 \text{ час}} \right)^2. \quad (17)$$

То есть даже для $t_{\text{obs}} \sim 1$ с и $\nu = 1$ ГГц эта величина остается много больше единицы вплоть до расстояний $r > 10^{20}$ см. Соответственно, на n -ной гармонике она будет еще в n раз больше. Таким образом, в реальных астрофизических условиях можно ожидать существенное изменение спектра синхротронного излучения.

Посмотрим теперь, что в действительности происходит со спектром синхротронного излучения при увеличении величины $n\delta\omega t_{\text{obs}}$. На Рис. 3 показаны спектры в постоянном и переменном поле для различных значений $n\delta\omega t_{\text{obs}}$ при $\gamma = 10$ вблизи гармоник $n = 50$ (слева) и $n = 200$ (справа). Для каждой пары значений $n\delta\omega t_{\text{obs}}$ они нормированы на максимум значения спектральной плотности энергии в постоянном поле. Во всех случаях время наблюдения t_{obs} было много меньше времени излучения t_{tot} . При этом здесь и далее частота ω_0 для постоянного поля выбиралась как полусумма соответствующих частот в переменном поле для начального и конечного времени наблюдения.

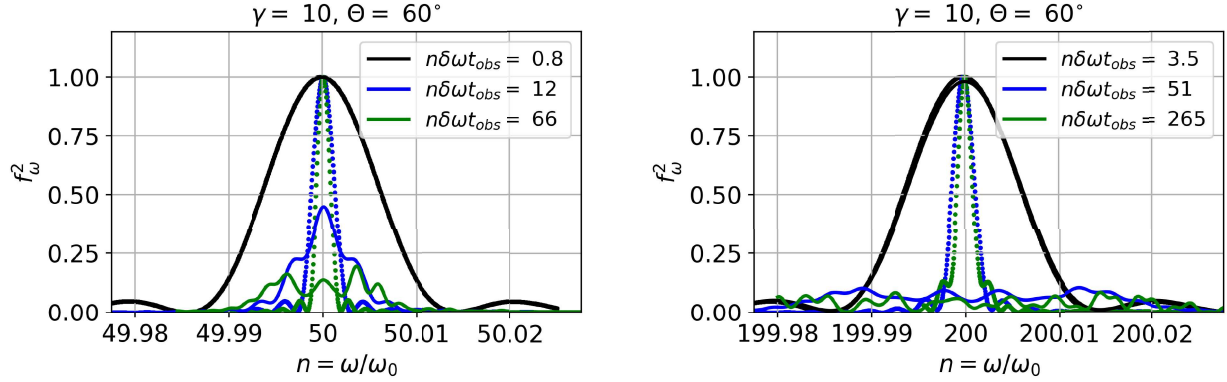


Рис. 3: Спектры в постоянном (пунктир) и переменном (сплошные линии) поле для различных значений $\delta\omega t_{\text{obs}}$ при $\gamma = 10$ вблизи гармоник $n = 50$ (слева) и $n = 200$ (справа).

Как мы видим, при $n\delta\omega t_{\text{obs}} < 1$ спектры в постоянном и переменном поле действительно мало отличаются друг от друга. Однако при увеличении времени наблюдения t_{obs} (а, значит, и величины $n\delta\omega t_{\text{obs}} \propto t_{\text{obs}}^2$) ширины пиков должны теперь зависеть не от естественного уширения, а от реального изменения основной частоты $\delta\omega \propto t_{\text{obs}}$. Поэтому в отличие от случая постоянного поля, когда увеличение времени наблюдения t_{obs} приводит к уменьшению естественных ширин $\Delta\omega$ (которые не зависят от номера гармоники n), в переменном поле ширины пиков, напротив, увеличиваются. Иными словами, полученные мелкомасштабные искажения не связаны с так называемым эффектом растекания спектра (spectral leakage), который неизбежно возникает при оконном преобразовании Фурье. Уширение линий, связанное с этим эффектом должно повторять спектр выбранной оконной функции (в нашем случае – прямоугольной), что видно на Рис. 3 для постоянного поля, и никак не может зависеть от номера гармоники в отличие от искажений в случае переменного магнитного поля.

Однако, как оказалось, такое сильное отличие спектров в неоднородном и однородном магнитном поле касается лишь их тонкой структуры. Интегральный же поток энергии в каждой гармонике (т.е. в интервале частот $\omega_n - 0.5\omega_0 < \omega_n < \omega_n + 0.5\omega_0$) при выполнении условия $t_{\text{obs}} \ll t_{\text{tot}}$ во всех случаях с точностью до 1% совпадал с потоком энергии в этой же гармонике для постоянного магнитного поля. Следует отметить, что постоянное и переменное магнитные поля выбирались таким образом, чтобы полная энер-

гия излучения за время наблюдения t_{obs} совпадала для обоих случаев. Тогда из теоремы Планшереля² [25] следует, что интегралы их Фурье-образов, взятые по всему диапазону частот, также должны совпадать, что позволяет корректно сравнивать интенсивности соответствующих гармоник.

Таким образом, вопрос об искажении интегрального, усредненного спектра (с которым мы как правило и имеем дело при наблюдениях) требует дополнительного исследования. В пользу возможности наблюдения существенных искажений говорит то, что, как уже отмечалось, в переменном поле благодаря уширению основной частоты ω_0 на величину $\delta\omega_0$ в n -той гармонике соответствующее уширение должно быть в n раз больше:

$$\delta\omega_n \approx n \frac{\omega_0 c}{r} t_{\text{obs}}. \quad (18)$$

Такое уширение хорошо видно из сравнения гармоник $n = 50$ и $n = 200$ на Рис. 3. В результате при $\gamma \gg 1$, когда $n \sim \gamma^3$, относительное уширение должно стать порядка

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_0} \sim \frac{ct_{\text{obs}}}{r} \gamma^3 \sim 10 \left(\frac{\gamma}{10} \right)^3 \left(\frac{r}{10^{16} \text{ см}} \right)^{-1} \left(\frac{t_{\text{obs}}}{1 \text{ час}} \right). \quad (19)$$

Следовательно, в районе максимума синхротронного спектра может иметь место перекрытие пиков, соответствующих различным гармоникам n . А это, в свою очередь, может должно приводить к существенному изменению интегрального спектра.

4 Искaжение интегрального спектра

В предыдущей главе для вычисления спектра синхротронного излучения мы непосредственно находили временную зависимость электрического поля $\mathbf{E}(t')$ в точке наблюдения и выполняли соответствующее Фурье-преобразование. Хотя такой подход является наиболее точным и применим для любых конфигураций внешних магнитных полей, он обладает ключевой проблемой - для нахождения усредненного спектра необходимо вначале вычислить его с точностью до мелкомасштабной структуры, что делает метод крайне ресурсоемким. В особенности его применение осложнено в наиболее интересном ультрарелятивистском случае, так как необходимое разрешение как во временном, так и в ча-

²Преобразование Фурье F линейно и взаимно однозначно отображает пространство $L_2(-\infty, +\infty)$ на себя, при этом для любого элемента $\phi \in L_2(-\infty, +\infty)$ справедливо равенство $\|F[\phi]\|_2 = \|\phi\|_2$.

стотном пространстве растет как гамма-фактор в кубе ($\Delta t \sim 1/\omega_B \gamma^3$, $\Delta \omega \sim \omega_B/\gamma^3$). Таким образом, возникает потребность в построении приближенного полу-аналитического метода нахождения интегрального спектра.

Для этого рассмотрим фурье-спектр вектор-потенциала в случае переменного магнитного поля. Являясь уже не дискретным, он будет определяться следующим выражением:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{t_{\text{obs}}} e^{\mathbf{v}(t)} e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]} dt, \quad (20)$$

где R_0 - расстояние от источника излучения до наблюдателя, а интегрирование производится по всему времени наблюдения. Оказывается, что в приближении слабо-неоднородного магнитного поля $(c/\omega_B) \cdot (\nabla \omega_B/\omega_B) \ll 1$ вычисление интеграла (20) можно существенно упростить, сведя задачу к известному случаю постоянного магнитного поля.

Действительно, в данном приближении движение частицы можно представить как набор витков, на масштабе которых изменением магнитного поля можно пренебречь. Тогда интегрирование по всему времени наблюдения можно заменить на сумму интегралов по “квазипериодам”, в каждом из которых магнитное поле можно будет считать постоянным. Таким образом выражение для итогового электрического поля сведется к сумме слагаемых вида (4) с формальной заменой номера гармоники n на отношение ω/ω_0^k и добавлением фазового множителя $e^{i\omega(t^k - r^k \cos \Theta/c)}$:

$$\mathbf{E}_\omega(\Theta, r) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} e^{i\omega(t^k - r^k \cos \Theta/c)} \mathbf{E}_\omega^k \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_\omega^k = \frac{2e}{cR_0} \frac{\omega}{\omega_0^k} \frac{\omega_B^{*k} \beta \sin \chi^k}{(1 - \beta \cos \chi^k \cos \Theta)^2} \left[\mathbf{l}_1 J'_{\omega/\omega_0^k}(z_\omega^k) - i \mathbf{l}_2 \frac{\cos \Theta - \beta \cos \chi^k}{\beta \sin \chi^k \sin \Theta} J_{\omega/\omega_0^k}(z_\omega^k) \right], \quad (22)$$

где

$$z_\omega^k = \frac{\omega}{\omega_0^k} \frac{\beta \sin \chi^k \sin \Theta}{1 - \beta \cos \chi^k \cos \Theta}, \quad (23)$$

а индекс k нумерует витки, на которые разбивается движение частицы. Конкретная же геометрия магнитного поля будет в свою очередь определять зависимость всех изменяющихся в пространстве величин от индекса k , а также зависимость самого индекса k от времени.

Интенсивность излучения в свою очередь можно вычислить следующим образом:

$$dI = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{cR_0^2}{2\pi} \left| \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} e^{i\omega(t^k - r^k \cos \Theta/c)} \mathbf{E}_\omega^k \right|^2 d\Omega. \quad (24)$$

Выражение для больших частот $\omega \gg \omega_0$ можно существенно упростить, проводя усреднение по малому интервалу частот $\omega_0 \ll \Delta\omega \ll \omega$:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega} = \frac{cR_0^2}{2\pi} \sum_{n=k_{min}}^{k_{max}} \sum_{m=k_{min}}^{k_{max}} \left\langle e^{i\omega(t^n - r^n \cos \Theta/c)} e^{-i\omega(t^m - r^m \cos \Theta/c)} \right\rangle_{\Delta\omega} \mathbf{E}_\omega^n \mathbf{E}_\omega^m. \quad (25)$$

Учтя теперь, что $(t_n - t_m) \gtrsim 1/\omega_0$ (аналогично $r^m/c - r^n/c$) при $n \neq m$, получим, что для достаточно больших $\Delta\omega$, $\left\langle e^{i\omega(t^n - r^n \cos \Theta/c)} e^{-i\omega(t^m - r^m \cos \Theta/c)} \right\rangle_{\Delta\omega} \approx \delta_{n,m}$. Тогда, для усредненного углового распределения интенсивности получаем:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega} = \frac{cR_0^2}{2\pi} \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} |E_\omega^k|^2, \quad (26)$$

где E_ω^k определяется выражением (22).

Отметим, что два слагаемых в выражении (22) фактически будут определять интенсивности двух линейных поляризаций. Выражения (22) и (26) обобщают формулы (4), (6) на случай слабо-неоднородного магнитного поля.

Теперь несложно получить критерий изменения интегрального спектра интенсивности. Действительно, как можно видеть из (22), (26), спектр в переменном поле складывается из выражений, аналогичных таковым для постоянного магнитного поля, однако с параметрами, меняющимися в некоторых диапазонах. При этом в наибольшей степени значения данных выражений зависят от питч-угла частицы χ_k , изменение которого на величину порядка $1/\gamma$ приводит к существенному изменению аргументов соответствующих функций Бесселя.

Таким образом, мы приходим к заключению, что при достаточно больших гамма-факторах в первом приближении можно не учитывать изменение амплитуды магнитного поля на траектории, а рассматривать только связанное с ним изменение питч-угла частицы. Поэтому существенного изменения интегрального спектра синхротронного излучения можно ожидать при выполнении условия $\gamma \cdot \delta\chi \gtrsim 1$, где $\delta\chi$ есть изменение питч-угла частицы за время наблюдения t_{obs} . А это значит, что при временах наблюдения, существенно меньших времени выхода наблюдателя из диаграммы направленности, искажением интегрального спектра синхротронного излучения можно пренебречь.

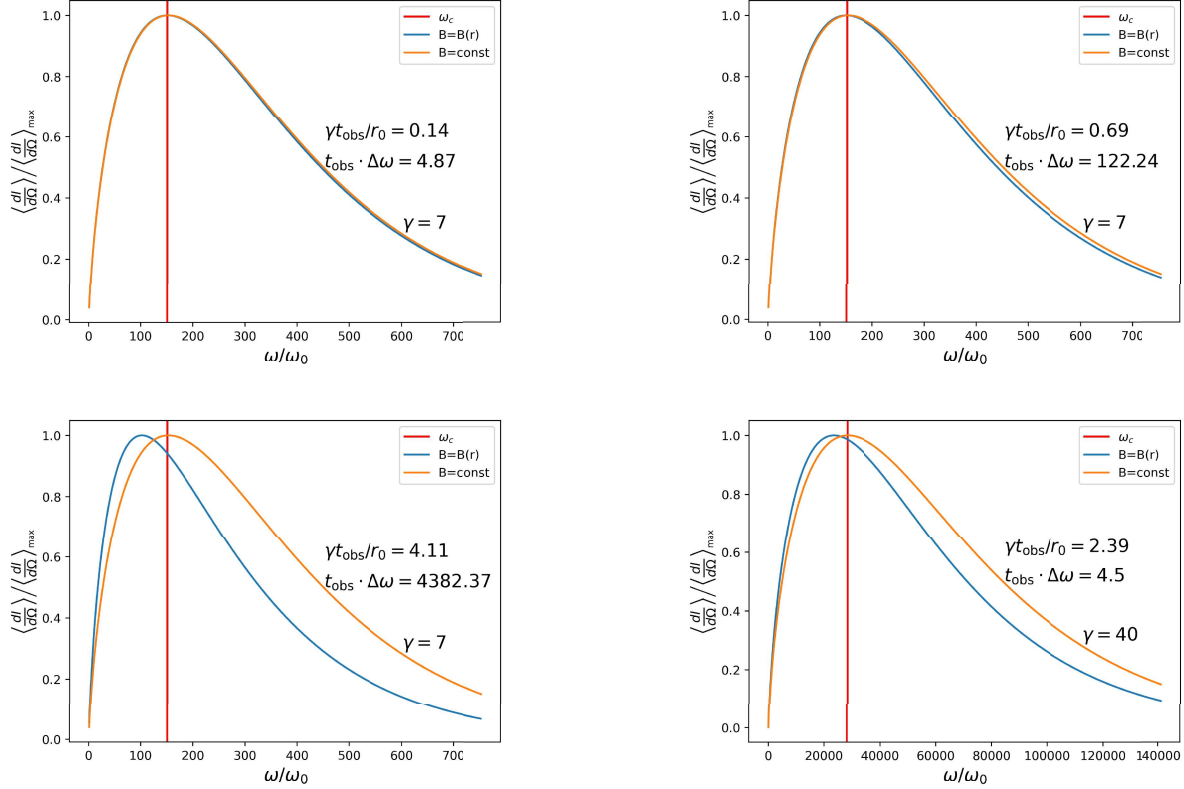


Рис. 4: Сравнение интегрального синхротронного спектра для случаев монопольного и однородного магнитных полей.

5 Синхротронное излучение ансамбля частиц

В реальных астрофизических задачах, связанных с релятивистскими джетами, всегда приходится иметь дело с ансамблем излучающих частиц, обладающих некоторой функцией распределения по энергиям и (начальным) питч-углам. При этом, как хорошо известно, ответ будет существенно зависеть от того, рассматриваем ли мы стационарный поток частиц или движущееся по направлению к наблюдателю излучающее облако плазмы [7, 10]. Здесь мы рассмотрим лишь первый случай, хотя, конечно, и другая постановка задачи в применении к джетам из активных галактических ядер также не лишена смысла.

В случае если частицы излучают некогерентно, итоговый спектр интенсивности можно вычислить просуммировав спектры излучения индивидуальных частиц с учетом

их функции распределения:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}^{\text{tot}} = \int \int d\chi_0 d\epsilon f(\chi_0, \epsilon) \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}(\chi_0, \epsilon). \quad (27)$$

Для упрощения анализа рассмотрим моноэнергетическое распределение частиц

$$f(\chi_0, \epsilon) = f_\chi(\chi_0) \delta(\epsilon - \epsilon_0). \quad (28)$$

Здесь ϵ_0 - энергия частицы (являющаяся постоянной в приближении малых потерь на излучение), а χ_0 - ее начальный питч-угол. Конечно, в действительности всегда имеется и некоторое нетривиальное распределение частиц по энергиям, однако, как будет показано в этой главе, данное приближение оказывается достаточным для исследования влияния неоднородности магнитного поля на интегральный спектр синхротронного излучения. Ключевым наблюдением является то, что несмотря на свободу выбора функции распределения $f_\chi(\chi_0)$, именно гамма-фактор частиц, соответствующий энергии ϵ_0 , будет определять вид искомого спектра. Действительно, в ультрарелятивистском режиме $\gamma \gg 1$, наибольший вклад в итоговую спектральную плотность излучения будут вносить частицы с питч-углами, отличающимися от угла наблюдения Θ не более, чем на $\sim 1/\gamma$. Таким образом, интеграл по питч-углу в выражении (27) набирается только в малой окрестности угла Θ , что позволяет приблизить любое достаточно гладкое распределение $f_\chi(\chi_0)$ однородным:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}^{\text{tot}} = \int_0^{\pi/2} d\chi_0 f(\chi_0) \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}(\chi_0) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\chi_0 \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}(\chi_0) \quad (29)$$

Воспользовавшись теперь выражением (26) для $\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}$ и классическим для ультрарелятивистского случая приближением $\chi_k \approx \Theta$, получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle_{\Delta\omega}^{\text{tot}} &= \frac{cR_0^2}{2\pi} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \int_0^{\pi/2} d\chi_0 |E_\omega^k|^2(\omega_0^k, \omega_B^{*k}, \chi^k) \approx \frac{cR_0^2}{2\pi} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \int_0^{\pi/2} d\chi_k \frac{d\chi_0}{d\chi_k} |E_\omega^k|^2(\omega_0, \omega_B^*, \chi^k) \approx \\ &\approx \frac{cR_0^2}{2\pi} \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} \int_0^{\pi/2} d\chi_k |E_\omega^k|^2(\omega_0, \omega_B^*, \chi^k) \propto \int_0^{\pi/2} d\chi_k |E_\omega^k|^2(\omega_0, \omega_B^*, \chi^k) \propto \mathcal{J}(\omega), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\mathcal{J}(\omega)$ определено выражением (9).

Таким образом, при гамма-факторах частиц, много больших единицы, наличие невырожденной функции распределения частиц по питч-углу (всегда присутствующее

в реальных астрофизических задачах), вне зависимости от геометрии крупномасштабного магнитного поля, приводит к тому, что форма спектра совпадает с классическим выражением для полной спектральной мощности потерь (26). При этом стоит еще раз подчеркнуть, что речь все также идет об интенсивности излучения, принимаемой удаленным наблюдателем, однако усреднение по питч-углу становится эквивалентным интегрированию по углу наблюдения. В субрелятивистском же режиме $\gamma \sim (5 - 10)$, конкретный вид угловой функции распределения частиц начинает оказывать существенное влияние на величину интеграла в выражении (29), и ее искажения, связанные с неоднородностью магнитного поля, приводят к соответствующим искажениям в спектре излучения (Рис. 5).

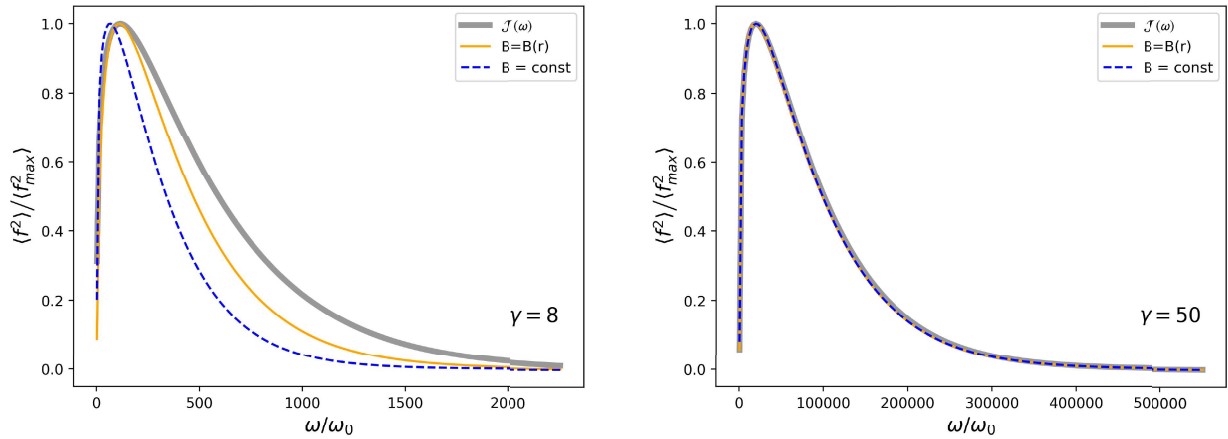


Рис. 5: Сравнение усредненных спектров синхротронного излучения ансамбля частиц с невырожденной угловой функцией распределения для двух различных γ -факторов.

Заключение

Таким образом, детальный анализ синхротронного излучения *одиночных* частиц показал, что неоднородность магнитного поля может приводить к изменению как мелкомасштабной, так и крупномасштабной структуры спектра синхротронного излучения. Мелкомасштабные искажения, то есть уширение спектральных линий, связанное не с конечностью времени наблюдения, а с изменением циклотронной частоты на траекто-

рии частиц, проявляются при условии $n\delta\omega t_{\text{obs}} \gg 1$, выполняющегося для большинства астрофизических источников. Однако, такие искажения представляют лишь теоретический интерес, так как полностью исчезают при мелкомасштабном усреднении спектра, связанного с ограниченностью спектрального разрешения радиотелескопов. Существенное изменение интегрального спектра возможно, однако, лишь при временах наблюдения больших, чем время излучения частицы в направлении наблюдателя и связано в первую очередь с изменением питч-угла частицы при ее движении в неоднородном магнитном поле.

Что же касается реальных астрофизических источников, в которых излучают ансамбли частиц, обладающие невырожденными функциями распределения по энергии и питч-углу, то для них неоднородность (крупномасштабного) магнитного поля играет еще менее заметную роль в формировании интегрального спектра. Действительно, в наиболее интересном для астрофизики ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ усреднение по угловой функции распределения оказывается эквивалентным интегрированию по углу наблюдения, что приводит к классическому выражению для полных спектральных потерь. И только в субрелятивистском режиме, при $\gamma \sim (5 \div 10)$ можно ожидать некоторых искажений в интегральном спектре. Подробное изучение данного вопроса выходит однако за рамки данного исследования.

Авторы благодарят Е. Е. Нохрину и А. П. Лобанова за плодотворное обсуждение. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 24-22-00120).

6 Приложение. Траектория частицы в случае монополюсного магнитного поля

Для монополюсного магнитного поля, вообще говоря, известно точное выражение для траектории частицы в сферической системе координат

$$\theta = \arctan \left(\frac{r_0 v \sin \chi_0}{\omega_B R_L^2} \right), \quad (31)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_B R_L^2}{r_0 v \sin \chi_0} \right)^2} \arctan \left(\frac{tv^2 + r_0 v \cos \chi_0}{r_0 v \sin \chi_0} \right), \quad (32)$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + 2r_0 tv \cos \chi_0 + t^2 v^2}. \quad (33)$$

При этом система отсчета выбрана таким образом, чтобы эффективный момент импульса

$$\mathbf{J} = m_e [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + \frac{e B_L R_L^2}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (34)$$

который в данном случае является интегралом движения, был направлен вдоль оси z .

Отсюда следует, что заряженная частица совершает движение по конической спирали

$$r(\varphi) = \frac{r_0 v \sin \chi_0}{v \left| \cos \left(\left[1 + \left(\frac{\omega_B R_L^2}{r_0 v \sin \chi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} \varphi \right) \right|}. \quad (35)$$

Тогда из шага спирали нетрудно получить точное выражение для частоты обращения релятивистской заряженной частицы в монополюном магнитном поле в плоскости xy

$$\omega_B^* = \omega_B \frac{R_L^2}{r^2} \left[1 - \frac{2\pi r_0 v \sin \chi_0}{\omega_B R_L^2} \sqrt{\frac{r^2 v^2}{r_0^2 (v \sin \chi_0)^2} - 1} \right]. \quad (36)$$

В случае крупномасштабной структуры магнитного поля (т.е., когда выполняется $R_L \gg r_B$, где r_B – гирорадиус, который в данном случае также будет меняться с расстоянием r) частоту можно представить в простом виде

$$\omega_B^* \approx \omega_B \frac{R_L^2}{r^2}. \quad (37)$$

Однако в силу эффекта Доплера наибольший интерес представляет частота импульсов ω_0^* , принимаемых наблюдателем. Ее приближенное значение можно получить непосредственно из запаздывающего момента времени $t' = t + \mathbf{r}(t') \mathbf{n}/c - R_0/c$, где $\mathbf{n} = (0, \sin \Theta, \cos \Theta)$ – единичный вектор вдоль луча зрения, R_0 – расстояние от источника до наблюдателя.

Действительно, при рассмотрении квазипериода принимаемых наблюдателем импульсов $T = t(\varphi + 2\pi) - t(\varphi)$ нетрудно получить

$$T = T' + \frac{[r(\varphi) - r(\varphi + 2\pi)]}{c} (\sin \Theta \sin \theta \sin \varphi + \cos \Theta \cos \theta), \quad (38)$$

где $T' = 2\pi/\omega_B^*$. Тогда, подставляя уравнение траектории (31)–(33), выражение для ω_0^* примет вид

$$\omega_0^* = \frac{\omega_B^*}{1 - \beta \cos \chi \left(\cos \Theta + a \sin \Theta \sin \frac{\pi/2 - \chi}{a} - 2\pi a \cot \chi \cos \Theta \right)}, \quad (39)$$

где теперь питч-угол χ , следуя сохранению поперечного адиабатического инварианта (12), представляет собой функцию расстояния. Здесь следует отметить, что выражение для частоты (39), вообще говоря, было получено в первом приближении по малой величине

$$a = \frac{r_0 v \sin \chi_0}{\omega_B R_L^2}, \quad (40)$$

причем для выбранных нами параметров задачи $B_L = 10^2$ Гс, $R_L = 10^{16}$ см имеем оценку $a \sim 10^{-12}$, что позволяет для рассматриваемого нами расстояния, которое успевает пройти излучающая заряженная частица за время t_{obs} , пренебречь первым порядком и представить наблюдаемую частоту в виде

$$\omega_0^* \approx \frac{\omega_B^*}{1 - \beta \cos \chi \cos \Theta}, \quad (41)$$

что и было использовано в данной работе (11).

Далее, используя выражения для траектории (31)–(33), несложно получить зависимость параметров ω_0^{*k} , ω_B^{*k} , χ^k от номера витка частицы k , необходимых для вычисления интегрального спектра излучения по формулам (22), (26). Условие же существенного изменения спектра $\gamma \cdot \delta\chi \gtrsim 1$ запишется тогда в виде $\gamma t_{\text{obs}}/r_0 \gtrsim 1$. Как можно видеть на Рис. 4 именно параметр $\gamma \cdot \delta\chi = \gamma t_{\text{obs}}/r_0$ определяет степень изменения интегрального спектра. В то же время в данном случае условие $t_{\text{obs}}\Delta\omega \gg 1$ не является определяющим.

Список литературы

- [1] *Динамика токовых слоев и физика солнечной активности*, Ред. А Э Балклавс (Рига: Зинатне, 1982)
- [2] *УФН* **180** 973 (2010)
- [3] *УФН* **195** 793 (2025)
- [4] Гинзбург В Л *Современная астрофизика* (М.:Наука, 1970)
- [5] Шкловский И С *Сверхновые звезды* 2 изд. (М.:Наука, 1976)
- [6] Гинзбург В Л, Сыроватский С И *УФН* **87** 65 (1965)

- [7] Гинзбург В Л, Сазонов В Н, Сыроватский С И *УФН* **94**, 63 (1968)
- [8] Гинзбург В Л, Сыроватский С И *Происхождение космических лучей*, (М.:Изд. АН СССР, 1963); Ginzburg V L, Syrovatskii S I *The Origin of Cosmic Rays*, Oxford: Pergamon Press, 1964).
- [9] Ginzburg V L, Syrovatskii S I *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **3** 297 (1965)
- [10] Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* (М.:Наука, 1987)
- [11] Пахольчик А Г *Радиоастрофизика* (М.:Мир, 1973); Pacholczyk A G *Radio Astrophysics* (Freeman W H and company San Francisco, 1970)
- [12] Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.:Наука, 1993)
- [13] Thorne K S *Astrophys. J. Suppl.* **8** 1 (1963)
- [14] Cavallo G, Horstman H M, Muracchini A *Astron. Astrophys.* **86** 36 (1980)
- [15] Lieu R, Axford W I *Astrophys. J.* **447** 302 (1995)
- [16] Medvedev M V *Astrophys. J.* **540** 704 (2000)
- [17] Cheng K S, Zhang J L *Astrophys. J.* **463** 271 (1996)
- [18] Viganò D, Torres D F, Hirokuni K, Pessah M E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **447** 1164 (2015)
- [19] Kelner S R, Prosekin A Yu, Aharonian F A *Astronom. J.* **149** 33 (2015)
- [20] Ковалев Ю А, Михайлуца В П *Астроном. Журн.* **57** 696 (1980)
- [21] Akiyama, K, Alberdi A, Alef W et al *Astrophys. J.* **875** L1 (2019)
- [22] Lister M L, Homan D C, Hovatta T et al. *Astrophys. J.* **874** 43 (2019)
- [23] Zamaninasab M, Clausen-Brown E, Savolainen T, Tchekhovskoy A *Nature* **510** 126 (2014)
- [24] Mertens F, Lobanov A P, Walker R C, Hardee P E *Astron. Astrophys.* **595** A54 (2016).
- [25] Кудрявцев Л Д *Курс математического анализа. Том 2* (М.:Высшая школа, 1988).