§ 1.4. Столкновения частиц в плазме

Проанализируем общую картину движения электронов и ионов в плазме при отсутствии внешних полей. Характер этого движения определяется законами взаимодействия частиц. В плазме с высокой степенью ионизации основная форма взаимодействия частиц — рассеяние в кулоновском поле. Нужно различать три основных типа элементарных актов рассеяния: рассеяние электронов на ионах, электронов на электронах и ионов на ионах. Другие элементарные процессы происходят либо с излучением фотонов (они будут рассмотрены в § 1.8), либо в них участвуют также и нейтральные частицы (и тогда они отступают на задний план по мере повышения степени ионизации). Примером процессов первого рода может служить испускание тормозного излучения при электрон-ионных столкновениях, примером второго — процессы ионизации и возбуждения атомов электронным ударом и явления перезарядки ионов на атомах. Если рассматривается неводородная плазма, то в общем случае следует учитывать взаимодействие электронов с ионами, находящимися в различных энергетических состояниях. В этом случае интенсивность излучения возбужденных ионов может оказаться очень большой, она будет играть заметную роль в энергетическом балансе плазменных процессов.

Мы ограничимся, в основном, анализом взаимодействия частиц в полностью ионизованной плазме.

Пусть через плазму проходит некоторая «пробная» частица (в качестве таковой мы можем выбрать любой электрон или ион плазмы, зафиксировав внимание на его траектории). Эта заряженная частица испытывает акты рассеяния на своем пути. Если речь идет о движении легкой частицы среди совокупности тяжелых частиц (электрона среди ионов), то центры рассеяния можно считать неподвижными. В указанном случае вероятность рассеяния на тот или иной угол определяется классической формулой Резерфорда.

Каждый акт рассеяния, обусловленный пролетом пробной частицы мимо рассеивающего центра, приводит к повороту траектории частицы на некоторый угол θ, т. е. к уменьшению скорости по первоначальному направлению движения от v до $v\cos\theta$. В подавляющем большинстве случаев акты рассеяния происходят на дальних дистанциях, т. е. при больших расстояниях, и, следовательно, как правило, сопровождаются очень малым изменением направления траектории (характерная особенность резерфордовского рассеяния в электрическом поле точечных зарядов!). Поэтому привычная для кинетической теории газов изломанная траектория частицы, состоящая из отдельных прямолинейных участков — пробегов, которые соединяют места «столкновений», в данном случае не имеет смысла. Вместо этого появляется картина плавно извивающейся линии, направление ее изменяется под действием многочисленных, но вместе с тем очень слабых импульсов, обусловленных «столкновениями» с другими частицами. Фактически эти импульсы сливаются в непрерывный ряд воздействий, оказываемых на движущуюся частицу «микрополем» плазмы, образуемым суперпозицией электрических полей отдельных частиц.

В рассматриваемом случае естественно ввести понятие о длине свободного пробега l как о расстоянии, на протяжении которого частица сохраняет первоначальное направление своей скорости. Это определение соответствует следующему равенству:

$$dv = -v\,dx/l. \tag{1.8}$$

Здесь dv — среднее изменение компоненты скорости по первоначальному направлению движения при прохождении отрезка пути dx. С учетом $dx = v\,dt$ (1.8) можно переписать в виде уравнения движения с некоторой эффективной силой трения:

$$m\,dv/dt = -mv(v/l) = -mv\nu, \tag{1.8a}$$

где введенную таким образом величину $\nu = v/l$ называют *частотой столкновений*.

Пользуясь определением (1.8а), можно представить l с помощью интеграла по угловому распределению рассеянных частиц. Если вектор скорости поворачивается при столкновении на угол θ, то проекция скорости по первоначальному направлению движения уменьшается на величину $\Delta v = v(1-\cos\theta)$. Поскольку основную роль играют акты рассеяния на малые углы ($\theta \ll 1$), то изменение скорости при элементарном столкновении можно представить как $\Delta v \approx v\theta^2/2$. Суммарное изменение скорости из-за рассеяния на нескольких центрах $\Delta v_N = (v/2)\Sigma\theta^2_i$, где суммирование проводится по всем N рассеивающим центрам. При прохождении элементарного отрезка пути dx заряженная частица встретится с $ndx\int ds$ рассеивающими центрами, находящимися на всевозможных прицельных расстояниях. Поэтому элемент площади ds можно выразить с помощью прицельного расстояния b как $ds = 2\pi b\,db$, тем более что элементарный угол рассеяния θ зависит именно от b. Для малых углов рассеяния θ справедливо соотношение $\theta \approx v_\perp/v$, где $v_\perp$ можно найти с помощью компоненты уравнения движения, перпендикулярной к направлению начальной скорости:

$$m\dot{v}_\perp \approx Ze^2 l/(b^2 + v^2t^2)^{3/2}.$$

Здесь мы предположили, что траектория пробной частицы представляет собой почти прямую линию, а расстояние наибольшего сближения практически совпадает с прицельным параметром. Отсюда

$$v_\perp \approx (2Ze^2/m)\int_0^\infty [b/(b^2+v^2t^2)^{3/2}]\,dt = 2Ze^2/mbv,$$

т. е. $\theta \approx 2Ze^2/mbv^2$. Следовательно, средняя величина

$$\overline{dv} = -dxnv2\pi \int\limits_{b_{\min}}^{b_{\max}} \theta^2 b db = -dxnv\,(4\pi Z^2e^4/m^2v^4)\ln(b_{\max}/b_{\min}). \qquad (1.9)$$

Сравнивая (1.9) с формулой (1.8), получаем

$$l = (1/4\pi n)\,(mv^2/Ze^2)^2[1/\ln(b_{\max}/b_{\min})]. \qquad (1.10)$$

Величины $b_{\max}$, $b_{\min}$ оценим исходя из следующих соображений. Электрическое поле рассеивающего центра можно считать кулоновским только на расстояниях, меньших дебаевского радиуса r_D. На больших расстояниях оно убывает экспоненциально, и, следовательно, столкновения, при которых частица проходит мимо рассеивающего центра на расстояниях, превышающих r_D, нужно из рассмотрения исключить. В действительности, конечно, дебаевское облако вокруг движущегося заряда лишь в грубом приближении можно считать сферическим. Время релаксации — установления такого облака — имеет тот же порядок величины, что и время пролета зарядом со средней тепловой скоростью расстояния, сравнимого с радиусом облака. Но строгая теория приводит лишь к небольшому количественному уточнению окончательного выражения для длины свободного пробега. Поэтому при вычислении l используем указанный метод обрезания предельного параметра $b_{\max}$ на величине r_D.

В качестве $b_{\min}$ можно взять прицельное расстояние, отвечающее рассеянию на углы $\theta \sim 1$, при которых нарушилось бы приближение малых углов. Полагая $\theta \sim 1$, находим

$$b_{\min} \sim Ze^2/mv^2. \qquad (1.11)$$

Поскольку стоящая под знаком логарифма в (1.10) величина, которая получена таким образом для актов взаимодействия частиц в плазме, оказывается очень большой (во всех представляющих интерес случаях от 10^4 до 10^8), то приблизительность оценки $b_{\max}$ и $b_{\min}$ практически не отражается на точности вычисления l *. Предположения, при которых найдено выражение для длины свободного пробега l, выполняются в случае, когда пробной частицей является электрон и рассматривается его взаимодействие с ионами плазмы. Среднюю длину свободного пробега, соответствующую электрон-ионным столкновениям в плазме, обозначим l_{ei}. Ее получают при усреднении выражения (1.10) по энергетическому спектру электронов. Если все ионы в плазме имеют единичный заряд, то, предполагая максвелловское распределение электронов по энергиям, получаем следующее выражение для средней длины свободного пробега:

* Более строгое рассмотрение, учитывающее квантовые эффекты в кулоновском рассеянии, при условии $Ze^2/\hbar v < 1$ (квазиклассическое приближение нарушено) приводит к видоизмененному выражению под знаком логарифма. Вместо $b_{\min}$ появляется длина волны де-Бройля $\hbar/mv$. Однако численно изменение значения логарифма незначительно.

$$l_{ei} = 4{,}5 \cdot 10^5 (T^\circ_e)^2/nL_K, \qquad (1.12)$$

где T°_e — температура электронов, К; L_K — так называемый кулоновский логарифм. Он получается при подстановке в выражение $\ln(b_{\max}/b_{\min})$ значений $b_{\max} = r_D$, $b_{\min} = q_e q_i/m_e v^2$ и $m_e v^2 = 3T_e$, $q_e = -q_i = -e$. В очень широких пределах изменения n и T_e логарифм L_K изменяется от 10 до 20. Поскольку в физике плазмы часто достаточно даже довольно грубой оценки величин, характеризующих процессы столкновений между частицами, то в дальнейшем будем считать $L_K = 15$.

Кроме l_{ei} можно ввести также некоторые другие усредненные характеристики процессов столкновения между электронами и ионами. Эффективное сечение для таких столкновений определяется соотношением $l_{ei} = 1/n\sigma_{ei}$, среднее время между двумя соударениями $\tau_{ei} = l_{ei}/v_{Te}$, где v_{Te} — средняя тепловая скорость электронов. Частота столкновений $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$. Указанные величины можно вычислить по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ei} \approx 3\cdot 10^{-5}(1/(T^\circ_e)^2);\ \tau_{ei} \approx 5\cdot 10^{-2}(T^\circ_e)^{3/2}/n);\\ &\nu_{ei} \approx 20\,(n/(T^\circ_e)^{3/2}). \end{aligned}\right\} \qquad (1.13)$$

Выражения для всех указанных параметров нетрудно обобщить на случай, когда столкновения происходят с многозарядными ионами. Эффективное сечение σ_{ei} возрастет в этом случае пропорционально квадрату заряда иона, соответственно изменятся и остальные величины.

Среди различных видов взаимодействия частиц в плазме столкновения между электронами и ионами играют наиболее важную роль, определяя, в частности, механизм таких процессов, как протекание электрического тока и диффузию.

Для полной характеристики кулоновского взаимодействия частиц в плазме нужно ввести такие же параметры, характеризующие статистический эффект столкновений между идентичными частицами (электрон-электронные и ион-ионные столкновения). В этом случае расчет осложняется тем, что при анализе элементарных актов столкновения нужно учитывать движение рассеивающих центров. Однако очевидно, что учет эффекта может отразиться только на значении численного коэффициента в формулах для средней длины свободного пробега, а температурная зависимость должна иметь одинаковый характер. В частности, выражение для l_{ee} (средняя длина свободного пробега при электрон-электронных столкновениях) должно совпадать с выражением для l_{ei} с точностью до численного коэффициента, не очень сильно отличающегося от единицы. Формула для l_{ii} (средняя длина свободного пробега при ион-ионных столкновениях) получается из формулы для l_{ei} при замене T_e на T_i. Значения τ_{ee} и τ_{ei} близки друг к другу.

Отношение τ_{ii}/τ_{ee} равно $(m_iT^3_i/m_eT^3_e)^{1/2}$. При равных электронной и ионной температурах ион-ионные соударения происходят гораздо реже, чем электрон-электронные или электрон-ионные.

Рассеивающими свойствами обладают не только хаотические микрополя отдельных заряженных частиц, но и электрическое поле плазменных колебаний. Попытаемся хотя бы грубо оценить длину свободного пробега электрона из-за взаимодействия с равновесными (Рэлея—Джинса) колебаниями плазмы. Воспользуемся для этого формулой $\Delta v = -v(\Delta x/l)$. Пусть Δx порядка нескольких дебаевских длин, т. е. порядка самых коротких длин плазменных колебаний. Изменение продольной скорости на этом расстоянии составит $\Delta v = -v(1-\cos\theta) \approx -v(\theta^2/2)$, где θ — угол отклонения электрона под действием поперечной компоненты электрического поля колебаний $E_\perp$. Значение этого угла можно считать равным отношению средней поперечной скорости, приобретаемой электроном в поле $E_\perp$, к продольной скорости v. Следовательно, угол $\theta \sim (eE_\perp/2m_e\omega_p)(1/v)$. Отсюда

$$\Delta v \sim (1/8v)(eE_\perp/m_e\omega_p)^2;\quad l \sim 8r_D v^2 (m_e\omega_p/eE_\perp)^2.$$

Принимая во внимание, что $E^2_\perp = (2/3)E^2 \approx 8\pi\, 1{,}38\cdot 10^{-16} T^\circ_e/3r^3_D$, получаем $l \approx 10^5 (T^{\circ 2}_e/n)$. Таким образом, при грубой оценке вклад поля колебаний с $\lambda > r_D$ в процессы рассеяния электронов оказывается примерно на порядок (в кулоновский логарифм раз) меньше вклада, который дают элементарные акты кулоновского столкновения частиц. Строгий расчет показывает, что и элементарные акты кулоновского рассеяния и рассеяние на колебаниях плазмы могут быть выведены как частные случаи взаимодействия частиц с флуктуациями микрополя. При этом «парные» столкновения — это результат рассеяния на флуктуациях микрополя, пространственные размеры которого меньше r_D. Флуктуации же с $\lambda > r_D$ надо рассматривать как суперпозицию плазменных колебаний.

Таким образом, длина пробега электрона из-за рассеяния на термодинамически равновесном фоне плазменных колебаний на порядок величины больше пробега по отношению к парным соударениям. Но плазма часто оказывается неустойчивой: амплитуды плазменных колебаний самопроизвольно нарастают до значений, которые во много раз превышают равновесные. В таких случаях длина свободного пробега определяется рассеянием на колебаниях. Такие плазмы обладают аномальными свойствами.

С введением понятия «длина свободного пробега» удобно еще раз вернуться к разделению плазм на идеальные и неидеальные. Условия идеальности $nr^3_D \gg 1$ можно переписать так: $\omega_p l/v_{Te} \gg 10$. Это условие означает, что за время одного периода колебания столкновений практически не происходит. В случае неидеальной плазмы столкновения становятся столь частыми, что колебания затухают слишком быстро и само понятие колебаний теряет смысл.

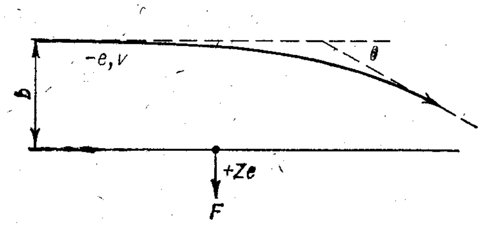

Рис. 1.4. Таектория электрона при кулоновском рассеянии на ионе

Подведем некоторые итоги. С помощью проведенного выше анализа мы попытались включить взаимодействие заряженных частиц в плазме в рамки элементарной кинетической теории газов, заменяя плавно изгибающиеся траектории электронов и ионов условными ломаными линиями и сводя статистический эффект многих слабых столкновений к одному условному сильному удару. Польза от применения таких не очень корректных методов заключается в том, что имея формулы для средней длины свободного пробега, среднего времени между ударами и т. д., можно оперировать наглядными картинами при анализе основных физических процессов в плазме. Существует, однако, вполне корректный метод анализа кулоновского взаимодействия частиц в плазме, основанный на использовании математического аппарата теории кинетических уравнений.

Остановимся теперь на вопросе об обмене тепловой энергией между электронами и ионами в плазме. Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть быстрый электрон с импульсом m_ev_e пролетает мимо неподвижного иона и испытывает рассеяние на угол θ, при этом иону передается импульс $2m_ev_e\sin(\theta/2)$ (рис. 1.4). Под действием этого импульса ион приходит в движение, приобретая кинетическую энергию

$$\Delta w_i = (1/2m_i)\,(2m_ev_e\sin(\theta/2))^2.$$

Чтобы найти энергию, которую быстрый электрон передает неподвижным ионам за единицу времени, нужно умножить Δw на $v_e f(\theta)\,d\Omega$ и проинтегрировать по углам:

$$-dw_e/dt = (4\pi ne^4/m_iv_e)\,L_K \qquad (1.14)$$

(предполагается, что ионы имеют единичный заряд). Выражение для передаваемой энергии преобразуем следующим образом:

$$(4\pi ne^4/m_iv_e)\,L_K = 2(m_e/m_i)\,\nu_{ei}w_e. \qquad (1.15)$$

Здесь ν_{ei} — число столкновений между электроном с кинетической энергией w_e и неподвижными ионами в единицу времени. Относительная доля энергии, теряемая в среднем при одном столкновении, составляет $2m_e/m_i$ (как и следовало ожидать для наглядной модели упругого удара двух шаров). Среднее значение энергии Q_{ei}, которую электрон плазмы передает ионам за 1 с, получается из (1.14) интегрированием по максвелловскому распределению по скоростям:

$$Q_{ei} = (1{,}2\cdot 10^{-17}/A)\,(n/(T^\circ_e)^{1/2}). \qquad (1.16)$$